

# Erhöhte Laserabsorption in ausgedehnten Clustermedien

Vom Fachbereich Physik  
der Technischen Universität Darmstadt

Zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr.rer.nat.)

genehmigte Dissertation von  
Dipl.-Phys. Murukesapillai Kanapathipillai  
aus Sri Lanka

Referent: Prof. Dr. P. Mulser  
Koreferent: Prof. Dr. D. H. H. Hoffmann

Tag der Einreichung: 21.10.2003  
Tag der Prüfung: 17.12.2003

Darmstadt 2003  
D17



## Kurzfassung

Nach gegenwärtigen Modellen für Absorption von Ultrakurzpulslasern in Edelgasclustern verläuft die Absorption in zwei Phasen. Am Anfang ist die Elektronendichte überkritisch bzgl. der Laserfrequenz. Die Stoßabsorption dominiert und es werden überwiegend die Elektronen geheizt. Infolgedessen expandieren die Elektronen, wodurch die Elektronendichte und damit die Plasmafrequenz abnimmt. Wenn die abnehmende Plasmafrequenz gleich der Laserfrequenz wird, es folgt starke resonante Kopplung, wodurch die zweite Phase der Absorption eintritt.

In dieser Arbeit werden zwei zusätzliche Absorptionsmechanismen vorgestellt. Erstens wird die kollektive Wechselwirkung durch Berücksichtigung von nichtresonanten Anregungen ergänzt. Zweitens wird gezeigt, dass der Clusterkern bzgl. der Elektronstreuung wie ein riesiger Atomkern fungiert und eine Erhöhung der Stoßabsorption hervorruft.

Die nichtresonanten Anregungen werden im Rahmen eines Globaldipolmodells untersucht und es wird gezeigt, wie diese nichtresonanten Anregungen zur Heizung der Elektronen bis zu einigen keV führen können, was schon experimentell gemessen wurde. Außerdem wird gezeigt, dass die im Rahmen von Globaldipolmodellen berechnete Umwandlungseffizienz der Laserenergie in Harmonische der Laserfrequenz annähernd mit gemessenen Ergebnissen übereinstimmt.

Der berechnete Absorptionskoeffizient als Funktion von Spitzenlaserintensität und Laserfrequenz ist sehr irregulär. Wir zeigen durch die Berechnung von Lyapunovexponenten, dass diese Irregularität ein Ausdruck des chaotischen Verhaltens des Globaldipols ist.

Ferner wird gezeigt, dass ein sich im thermischen Gleichgewicht befindender Cluster maßgeblich geladen ist. Die Elektronenstreuung durch den Clusterkern wird ausführlich untersucht und es wird gezeigt, dass die sehr große Ladung ( $\sim 10^4 e$ ) des Clusterkerns zu wesentlich erhöhter Stoßabsorption führt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	11
1.2	Experimentelle Beobachtungen . . . . .	16
1.3	Theoretische Untersuchungen . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Nichtresonante kollektive Absorption</b>	<b>21</b>
2.1	Modellgleichungen . . . . .	21
2.2	Lösungen . . . . .	27
2.2.1	Niedrige Intensitäten - harmonischer Oszillator . . . .	27
2.2.2	Höhere Intensitäten . . . . .	31
2.2.3	Vergleich von Globaldipolmodell mit PIC-Simulation für ebene Cluster . . . . .	34
2.2.4	Die Harmonischen von Laserfrequenzen . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Chaotisches Verhalten des Globaldipolmodells</b>	<b>41</b>
3.1	Kurze Einführung in die Chaostheorie . . . . .	42
3.2	Berechnung der Lyapunovexponenten . . . . .	44
3.3	Lyapunovexponenten des Globaldipolmodells . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Erhöhte Stoßabsorption eines Laserstrahls in Clustern</b>	<b>51</b>
4.1	Coulombstreuung . . . . .	51
4.2	Streuung durch Clusterkerne . . . . .	54
4.3	Stoßfrequenz . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Cluster im thermischen Gleichgewicht</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Berechnung der Kraft zwischen zwei geladenen und sich durchdringenden Kugeln</b>	<b>71</b>
A.1	$0 \leq x < R_2 - R_1$ . . . . .	72
A.2	$R_2 - R_1 \leq x < R_2 + R_1$ . . . . .	72
A.3	$R_2 + R_1 \leq x$ . . . . .	73



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Gemessener Absorptionskoeffizient in Xe-Gasjets als Funktion der Spitzenlaserintensität. Stagnationsdruck 35 bar. Die Gas-temperaturen unmittelbar vor dem Austritt war 20 <sup>0</sup> C (Quadrate) und −85 <sup>0</sup> C (Kreise) [1]. . . . .	12
1.2	Gemessener Absorptionseffizienz in einem H <sub>2</sub> Gasjet als Funktion des Stagnationsdrucks. Spitzenlaserintensität $7 \times 10^{16}$ W·cm <sup>−2</sup> . Die Erhöhung der Effizienz ist infolge Clusterbildung [2]. . . . .	13
1.3	(a) Neunte Harmonische (Wellenlänge 86.7 nm), Ausbeute als Funktion von Stagnationsdruck. Spitzenlaserintensität $5 \times 10^{13}$ W·cm <sup>−2</sup> . (b) Rayleighstreuungssignal vom Gasjet als Indikator für Clusterbildung. Die erhöhte Umwandlungseffizienz des Clusters ist offensichtlich [3]. . . . .	14
1.4	Gemessenes Elektronenspektrum von Xe-Clustern. Spitzenlaserintensität $5 \times 10^{16}$ W·cm <sup>−2</sup> . Die Anzahl von Clusteratomen beträgt $\sim 1.2 \times 10^4$ Atome [4]. . . . .	15
1.5	Winkelverteilung der Elektronen(Quadrate) und Photonen(Kreise). Spitzenlaserintensität $5 \times 10^{16}$ W·cm <sup>−2</sup> . Die Anzahl von Clusteratomen beträgt $\sim 1.2 \times 10^4$ Atomen. Das Maximum liegt in Richtung des laserelektrischen Feldes [4]. . . . .	16
1.6	Ionenspektrum aus Clustern verschiedener Größe. Spitzenlaserintensität $2 \times 10^{16}$ W·cm <sup>−2</sup> . Die mittlere Energie ist 29 keV für 400 Atome/Cluster, 38 keV für 900 Atome/Cluster, 39 keV für 1600 Atome/Cluster und 41 keV für 2500 Atome/Cluster [5]. . . . .	17
1.7	Gemessene Ladungszustandsverteilung aus 2500 Atom-Xe-Cluster. Spitzenlaserintensität $2 \times 10^{16}$ W·cm <sup>−2</sup> [5]. . . . .	18
2.1	Elektronendichteprofil eines ebenen Clusters für verschiedene Zeiten. Die Zeiten sind in Einheiten von Laserperioden angegeben. Die Laserwellenlänge wurde als 1 μm angenommen. Laserspitzenintensität $5.48 \times 10^{18}$ W·cm <sup>−2</sup> , Pulsedauer 6 Laserperioden. Elektronendichte $n_e = 10^{29}$ m <sup>−3</sup> . Daraus folgt: $\omega/\omega_0 = 0.1$ , wobei $\omega$ die Laserfrequenz und $\omega_0$ die Resonanzfrequenz für kleine Auslenkungen sind. . . . .	22
2.2	$f_s(r_n, r_a)$ und $\varphi_s(r_n, r_a)$ als Funktionen von $r_n$ für verschiedene Werte von $r_a$ . . . . .	23
2.3	Die Pulsform $\tilde{g}(\tau, \tilde{z}, \psi)$ für verschiedene Zeiten. . . . .	24

2.4	Der Bruchteil der von harmonischen Oszillatoren absorbierten Energie als Funktion der Zeit. $I_0 = 10^{22} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ , $\omega/\omega_0 = 0.3$ . Wiederum ist $\omega$ die Laserfrequenz und $\omega_0$ ist die Eigenfrequenz des Oszillators. . . . .	29
2.5	Der Bruchteil der von harmonischen Oszillatoren absorbierten Energie als Funktion von $\omega/\omega_0$ ; $n = 12$ . Der Bruchteil ist unabhängig von $I_0$ . . . . .	30
2.6	Der Bruchteil der vom Cluster absorbierten Energie als Funktion der Zeit. $R = 50\text{\AA}$ und $\omega/\omega_0 = 0.3$ . Abbildung (a) zeigt den Fall für $I_0 = 10^{21} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Die maximale Energie des Teilchens ist immer niedriger als die Fluchtenergie. Das Teilchen bleibt an den Clusterkern gebunden. Abbildung (b) zeigt den Fall für $I_0 = 10^{22} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Die punktierte Linie kennzeichnet die Fluchtenergieschwelle. Nach dem Abklingen des Laserpulses bleibt die Teilchenenergie größer als die Fluchtenergie; das Teilchen trennt sich vom Clusterkern. . . . .	32
2.7	Der Bruchteil der vom Cluster absorbierten Energie $f_a$ als Funktion von $\omega/\omega_0$ und $\log(I_0)$ . $R = 50\text{\AA}$ und $n = 12$ . Mit zunehmender Intensität verschiebt sich das Maximum in Richtung niedriger Frequenzen. Das ergänzende Konturdiagramm ist Abbildung 3.2. . . . .	33
2.8	$\mathcal{E}_p/Mc^2$ als Funktion von $\omega/\omega_0$ und $\log(I_0)$ . $R = 50 \text{ \AA}$ und $n = 12$ . Das ergänzende Konturdiagramm ist Abbildung 3.1. . . . .	33
2.9	Der Bruchteil der vom Cluster absorbierten Energie als Funktion von $\omega/\omega_0$ und $\log(I_0)$ . Anfangsradius des Clusters $R = 50\text{\AA}$ , und $n = 12$ . Der Radius der Elektronenkugel wächst linear von $R$ zu $70R$ während der Dauer des Laserpulses. . . . .	34
2.10	$\mathcal{E}_p/Mc^2$ als Funktion von $\omega/\omega_0$ und $\log(I_0)$ . Anfangsradius des Clusters $R = 50\text{\AA}$ , und $n = 12$ . Der Radius der Elektronenkugel wächst linear von $R$ zu $70R$ während der Dauer des Laserpulses. . . . .	35
2.11	Ebener Cluster : $f_p(z_n, z_a)$ und $\varphi_p(z_n, z_a)$ als Funktionen von $z_n$ für verschiedene Werte von $z_a$ . . . . .	36
2.12	Ebener Cluster : $z_a = 1$ ; $f_a$ als Funktion von $\tau$ . Abbildung (a) zeigt den Fall $\omega/\omega_0 = 0.1$ , $d_1 = 10 \text{ nm}$ und Abbildung (b) den Fall $\omega/\omega_0 = 0.3$ , $d_1 = 3.3 \text{ nm}$ . In beiden Fällen ist $\omega_p = 1.77 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ , $n = 16$ und $I_0 = 10^{22} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . . . . .	37
2.13	Umwandlungseffizienz von Laserstrahlung in die Harmonische. Die Spitzenlaserintensität beträgt $5.0 \times 10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Die Pulsdauer beträgt sechs Laserperioden. Anfangsradius des Clusters $R = 50\text{\AA}$ . Der Radius der Elektronenkugel wächst linear von $R_1$ zu $70R_1$ während der Dauer des Laserpulses. $q = 10^4$ und $\omega/\omega_0 = 0.3$ . . . . .	38
3.1	Konturdiagramm von $\mathcal{E}_p/Mc^2$ . . . . .	41
3.2	Konturdiagramm von $f_a$ . . . . .	42



3.3	Schwingungsamplituden von $\tilde{x}(\tau)$ als Funktion von $\log(I_0)$ und dazugehöriges $\lambda_1$ -Spektrum. . . . .	43
3.4	Fourierspektrum von $\tilde{x}(\tau)$ , $d\tilde{x}(\tau)/d\tau$ , und $f_a(\tau)$ . . . . .	44
3.5	$\lambda_1$ -Spektrum als Funktion von $\omega/\omega_0$ und $\log(I_0)$ . $R = 50 \text{ \AA}$ , und $n = 12$ . . . . .	48
4.1	Streuung eines Elektrons mit Geschwindigkeit $v$ durch Clusterkern mit Radius $R = 1$ . Die Ladung des Kerns $q$ ist über das ganze Kugelvolumen gleichmäßig verteilt. $\mathbf{r}$ ist der Ortsvektor, $r_{min}$ ist die minimale Entfernung der Elektronenbahn vom Zentrum des Clusters, $\varphi_C$ ist der Auslenkwinkel des Ortsvektors innerhalb des Clusters, $\varphi$ ist der totale Auslenkwinkel des Ortsvektors, und $\chi$ ist der totale Streuwinkel. Die Bahnen mit $b < b_c = (1 + 2b_\perp)^{1/2}$ dringen in den Cluster ein. In der Abbildung werden die Bahnen für $b = b_c = \sqrt{3}$ ( $b_\perp = 1$ , $\chi = 60^\circ$ ) und $b = b_c/2$ gezeigt. Die Streuung innerhalb des Clusterkerns ist schwach. . . . .	52
4.2	Streuwinkel $\chi$ als Funktion von Stoßparameter $b$ für einen homogen geladenen sphärischen Cluster. Linie a entspricht $b_\perp = 2.5$ (niedrige Elektronenergie), und Linie b entspricht $b_\perp = 0.5$ ( $5\times$ höhere Elektronenergie). Die entsprechenden Streuwinkel innerhalb des Clusters sind durch die Linien c und d dargestellt. Diese Linien enden an entsprechenden $b = b_c$ -Punkten an der Achse $b$ . . . . .	56
4.3	Schematische Darstellung von einem Stoßprozess. $\mathbf{p}_i$ ist der Anfangsimpuls des Elektrons. Nach der elastischen Streuung durch den Cluster verläßt das Elektron den Einflußbereich des Clusterkerns mit dem Endimpuls $\mathbf{p}_f$ . $\Delta\mathbf{p}$ ist der Impulsverlust des Elektrons. $ \mathbf{p}_f  =  \mathbf{p}_i $ . . . . .	57
4.4	$\sigma_1/\sigma_C$ als Funktion von $b_\perp$ . . . . .	60
5.1	Gleichgewichtsverteilung von Elektronen in einem sphärischen Cluster ( $\alpha = 10^{-6}$ ). Die Cluster mit Radius kleiner als eine Debyelänge sind völlig ionisiert. . . . .	62
5.2	Gleichgewichtsverteilung von Elektronen in einem sphärischen Cluster ( $\alpha = 0.1$ ). . . . .	63
5.3	Vergleich der Gleichgewichts-Elektronen-Dichteverteilung eines ebenen Clusters aus der PIC-Simulation mit dem Ergebnis, das mit dem hier beschriebenen Formalismus berechnet wurde. . .	64
5.4	Ladungsbruchteil $q_c$ von sphärischen Clustern als Funktion von Clusterradien für verschiedene $\alpha = 0.001$ , $0.1$ , und $0.2$ . . . . .	66
A.1	Schematische Darstellung der Kugeln. Die Abbildungen (a), (b), und (c) zeigen die verschiedene Fälle, in denen die analytischen Ausdrücke für die Kraft unterschiedlich sind. . . . .	71



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Allgemeines

Der Weg zur Kernfusion führt über die Physik der Materie mit hoher Energiedichte. In der Tat, eine auf thermischer Kernverschmelzung basierende, sich selbst erhaltende Verbrennung kann nur in Materie mit hoher Energiedichte stattfinden. Unter “hoher Energiedichte” wird ein Wert von mehr als  $10^{11} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$  verstanden, was wiederum einem Druck von mehr als einem Mbar entspricht. Hier werden jedoch nur die Prozesse berücksichtigt, in denen die Temperatur der Materie höchstens einige hundert keV beträgt. Materie mit höherer Energiedichte, die beim Zusammenstoß von gegeneinander stark beschleunigter Kerne oder “Elementarteilchen” entsteht, wo die Temperatur und Dichte mehr als einige MeV bzw.  $10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  betragen (Dichte von Kernmaterie [6]), liegt außerhalb unserer Betrachtung.

Da die Materie auf der Erde eine relativ niedrige Energiedichte hat und jede starke Abweichung der Energiedichte von diesem durchschnittlichen Wert sehr schnelle Relaxationsprozesse in Gang setzt, die diese Abweichung schnell neutralisieren, kann Materie mit hoher Energiedichte nur in räumlich und zeitlich sehr begrenztem Bereich ökonomisch realisiert werden.

Kontrollierbare Materie mit hohen Energiedichten kann zur Zeit mit Kurzpulslasern, Schwerionenstrahlen, und mit sogenannten Z-Pinch-Maschinen erzeugt werden [7]. Die Z-Pinch-Maschinen können einige MJ an weicher Röntgenstrahlenergie in einem Volumen von einigen  $\text{cm}^3$  innerhalb von einigen Nanosekunden deponieren. Schwerionenbeschleuniger, wie SIS-18 bei der GSI, können einige kJ Energie in Form von mehreren hundert ps langen Schwerionenpulsen erzeugen. Allerdings haben die Schwerionenstrahlen eine relativ lange Reichweite in der Materie und daher ist die Energiedeposition nicht hinreichend lokalisiert. Obwohl mit zunehmender Dichte der Materie die Reichweite der Ionenstrahlen abnimmt, nimmt sie jedoch mit wachsender Energie des einzelnen Ions zu.

Im Gegensatz zu Z-Pinch und Schwerionenstrahl besitzen Ultrakurzpulslaser zwei vorteilhafte Eigenschaften bezüglich Erzeugung hoher Energiedichte. Erstens liegt die Pulsdauer von ultrakurzen Laserpulsen im Bereich unter 100 fs, zweitens können die Laserstrahlen, unabhängig von ih-

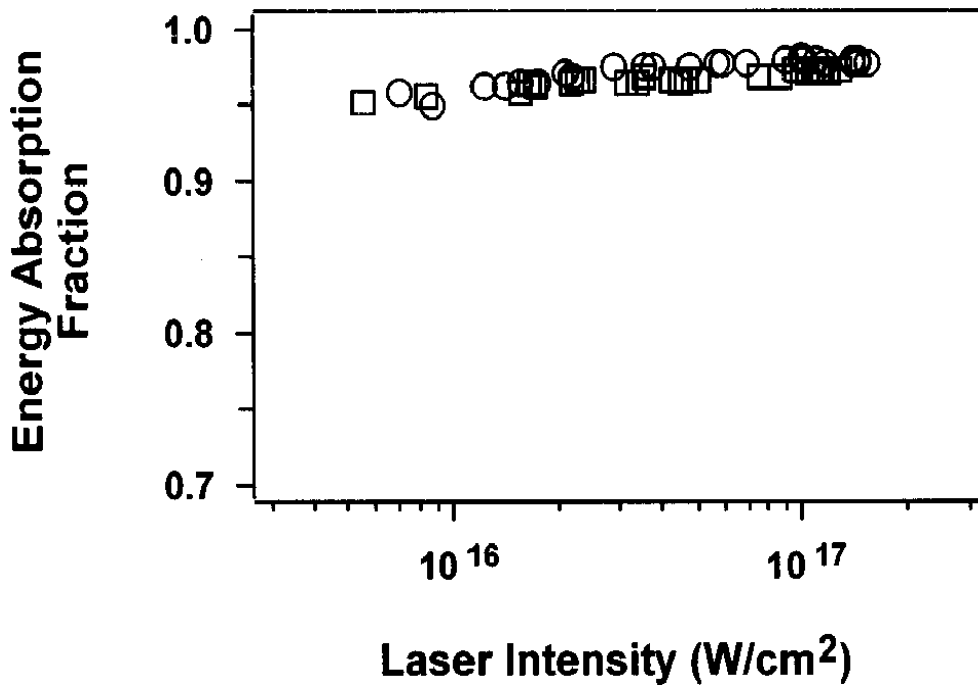


Abbildung 1.1: Gemessener Absorptionskoeffizient in Xe-Gasjets als Funktion der Spitzenlaserintensität. Stagnationsdruck 35 bar. Die Gas-temperaturen unmittelbar vor dem Austritt war 20°C (Quadrate) und -85°C (Kreise) [1].

rer Intensität innerhalb einer Distanz von einer Laserwellenlänge in einem überdichten Medium gestoppt werden. Ultrakurze Laserpulse können also bedeutende Teile ihrer Energie in sehr kleinen Raum- und Zeitbereichen deponieren. Aber, wie oben erwähnt, setzen sehr starke Energietransportprozesse, die in dichter Materie unausweichlich sind, der erreichbaren Energiedichte eine nicht so hohe obere Grenze.

Der Durchmesser eines großen Clusters ist mindestens eine Größenordnung kleiner als die Wellenlängen vorhandener leistungstarker Ultrakurzpulslaser. Aus dieser Tatsache folgt:

1. Der Laser durchdringt den Cluster.
2. Da wegen (1) kein Temperaturgefälle entsteht, gibt es keine Abkühlung durch Wärmeleitung, die in Festkörpern sehr maßgebend ist.
3. Wiederum wegen (1) können große Volumina von Clustermedien mit einem einzigen Laserpuls bestrahlt werden.

Da die Dichte der Materie in Clustern fast gleich der Festkörperdichte ist, ist die inverse Bremsstrahlung und Resonanzabsorption sehr begünstigt.

Cluster werden unter geeigneten Bedingungen durch Expansion eines gekühlten Gases in einer Düse erzeugt [8]. Wenn der Stagnationsdruck hinter der Düse genügend hoch und die Temperatur genügend tief ist, so wird das Gas bei der Expansion stark unterkühlt und bildet Cluster. Die Kühlung findet statt, weil die Expansion isentrop ist und die thermische Energie in kinetische Energie der expandierenden Gasmasse umgesetzt

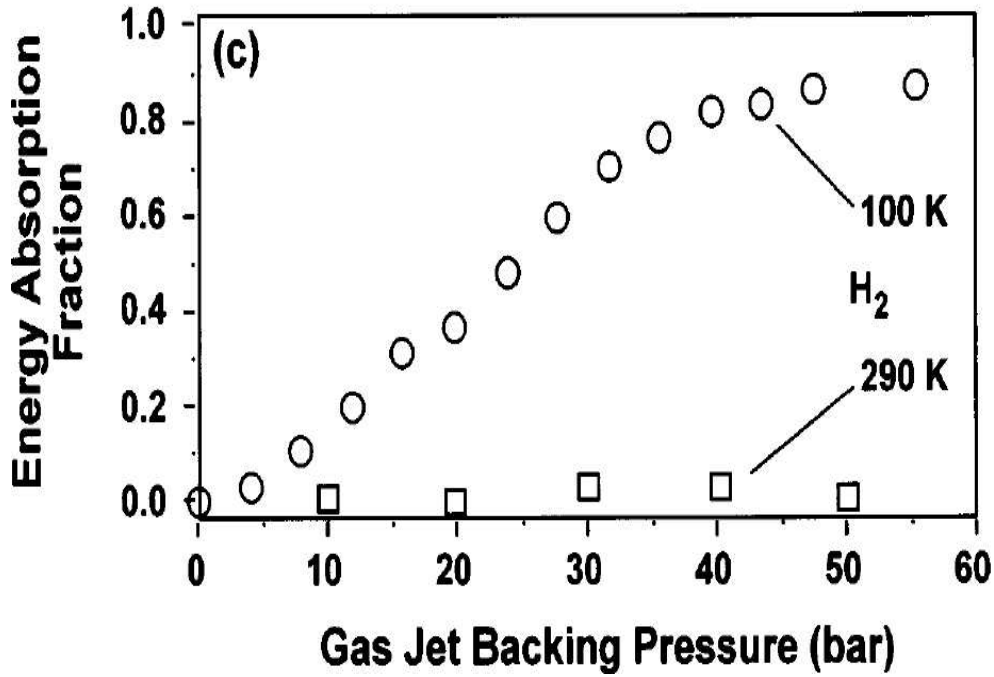


Abbildung 1.2: Gemessener Absorptionseffizienz in einem  $H_2$  Gasjet als Funktion des Stagnationsdrucks. Spitzenlaserintensität  $7 \times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Die Erhöhung der Effizienz ist infolge Clusterbildung [2].

wird. Die Clustermassenverteilung ist normalerweise pseudo-gaußisch. Das Maximum und die Breite der Verteilung sind durch den Partialdruck des Clustermaterials und des Trägergases bestimmt.

Die Bedingungen für die Entstehung von Clustern in solchen Expansionsprozessen können durch den empirischen Parameter

$$\Gamma = k \frac{(d/\tan(\alpha/2))^{0.85} p_0}{T_0^{2.29}} \quad (1.1)$$

charakterisiert werden [9, 10]. Hier ist  $k$  eine vom verwendeten Gas abhängige Konstante ( $k \approx 2900$  für Kr, 1700 für Ar, 180 für Ne, und 4 für He) [10, 11],  $d$  der Durchmesser der Düse in  $\mu\text{m}$ ,  $\alpha$  der Düsenexpansionswinkel,  $p_0$  der Stagnationsdruck und  $T_0$  die Temperatur des Gases unmittelbar vor dem Austritt aus der Düse. Clusterbildung beginnt, wenn  $\Gamma$  den Wert von etwa 300 übersteigt. Wenn  $\Gamma$  weiter zunimmt, wächst die Anzahl der Atome im Cluster proportional zu  $\Gamma^{2.0-2.5}$  [9, 12]. Wenn  $\Gamma$  den Wert von  $5.0 \times 10^4$  übersteigt, entstehen überwiegend größere Cluster mit mehr als  $10^4$  Atomen [11]. Die hohen Werte von  $k$  für schwere Edelgase bedeuten, dass die Clustererzeugung in diesen Gasen am einfachsten ist.

Die Bindungsenergie der Clusteratome liegt in Bereich von 0.02-0.17 eV/Atom für Edelgascluster [13]. Deshalb wird der Cluster beim Erhitzen schnell zerstört. Die Zeit für die Disintegration von einem Cluster kann unter der Annahme, dass der Cluster mit Ionenschallgeschwindigkeit expandiert und die Expansion bis zur Ausgleichung der Dichte der Clustermaterie und der Dichte des Hintergrundplasmas andauert, abgeschätzt werden [14].

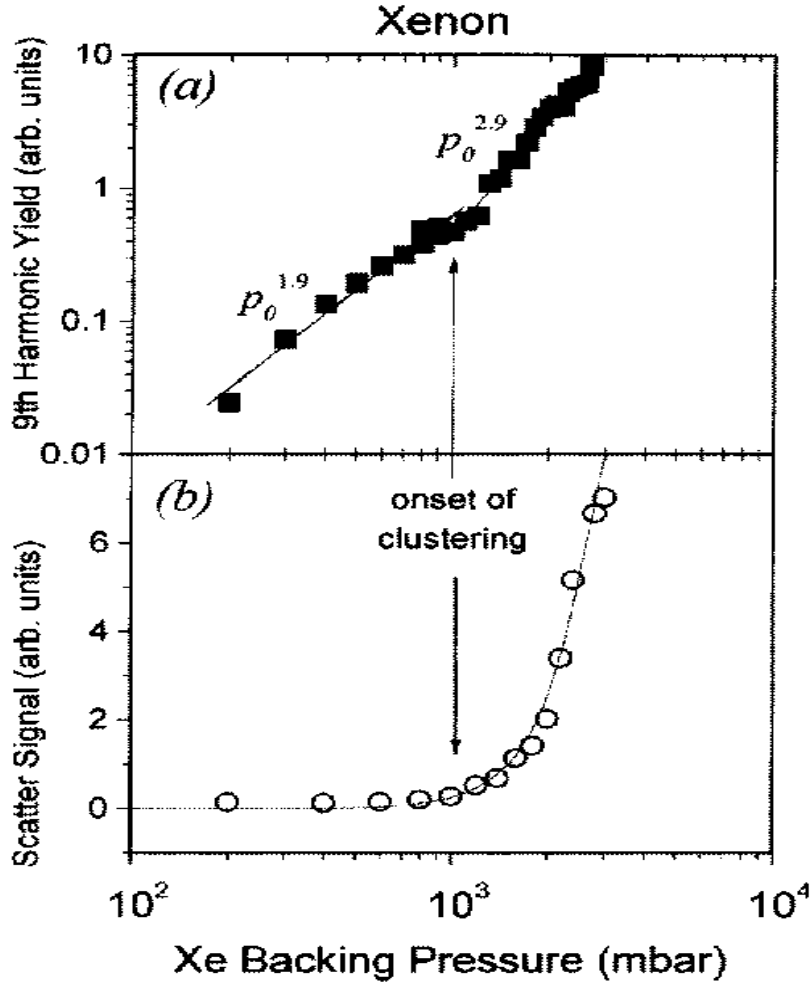


Abbildung 1.3: (a) Neunte Harmonische (Wellenlänge 86.7 nm), Ausbeute als Funktion von Stagnationsdruck. Spitzenlaserintensität  $5 \times 10^{13} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$ . (b) Rayleighstreuungssignal vom Gasjet als Indikator für Clusterbildung. Die erhöhte Umwandlungseffizienz des Clusters ist offensichtlich [3].

Die Expansionszeit ist dann gegeben durch

$$\tau = R_i \left( \frac{n_i}{n_e} \right) / \left( \frac{Z T_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

wobei  $n_i$  die Anfangsclusteratomdichte,  $R_i$  der Anfangsclusterradius,  $n_e$  die Dichte der Atome in Hintergrundplasma,  $Z$  und  $m_i$  die Ladungszahl bzw. die Masse eines Clusteratoms und  $T_e$  die Elektronentemperatur ist. Für einen Argoncluster mit 0.38 nm Anfangsabstand zwischen den Atomen,  $T_e = 1 \text{ keV}$  und  $n_e = 10^{24} \text{ m}^{-3}$  liegt  $\tau$  im Bereich von ps. Deshalb kann ein solcher Cluster nur von einem ultrakurzen Laserpuls von höchstens 100 fs Dauer effektiv geheizt werden.

Leistungstarke ultrakurze Laserpulse mit Pulsdauer von einigen zehn Femtosekunden werden durch sogenannte gezirpte Pulsverstärkung erzeugt [15]. Diese Technik fand in den sechziger Jahren erstmals in leistungstarken Radaranlagen Verwendung [16]. Beim Zirpen wird jeder Frequenzkomponente des Anfangspulses eine frequenzabhängige Fortschrei-

tungsgeschwindigkeit auferlegt, was die Ausdehnung des Pulses in Raum und Zeit zur Folge hat. Beim positiv (negativ) gezirpten Puls bewegen sich niedrige Frequenzkomponenten schneller (langsamer) als die Hochfrequenzkomponenten. Ein Puls kann positiv als auch negativ gezirpt werden. Das Zirpen wird realisiert indem man den Puls durch ein dispersives (normales als auch anomales) Medium wie Glasfaser oder eine Anordnung von Gittern und Spiegeln laufen läßt. Der ausgedehnte Puls kann dann bis zu der von den Verstärkerelementen tolerierbaren Intensitätsstärke ohne Verformung verstärkt werden. Der verstärkte Puls wird dann wieder komprimiert. Pulskompression wird erzielt, indem man den Puls durch ein dispersives Medium laufen läßt. Normalerweise dienen Gitter-Spiegelanordnungen als Kompressoren.

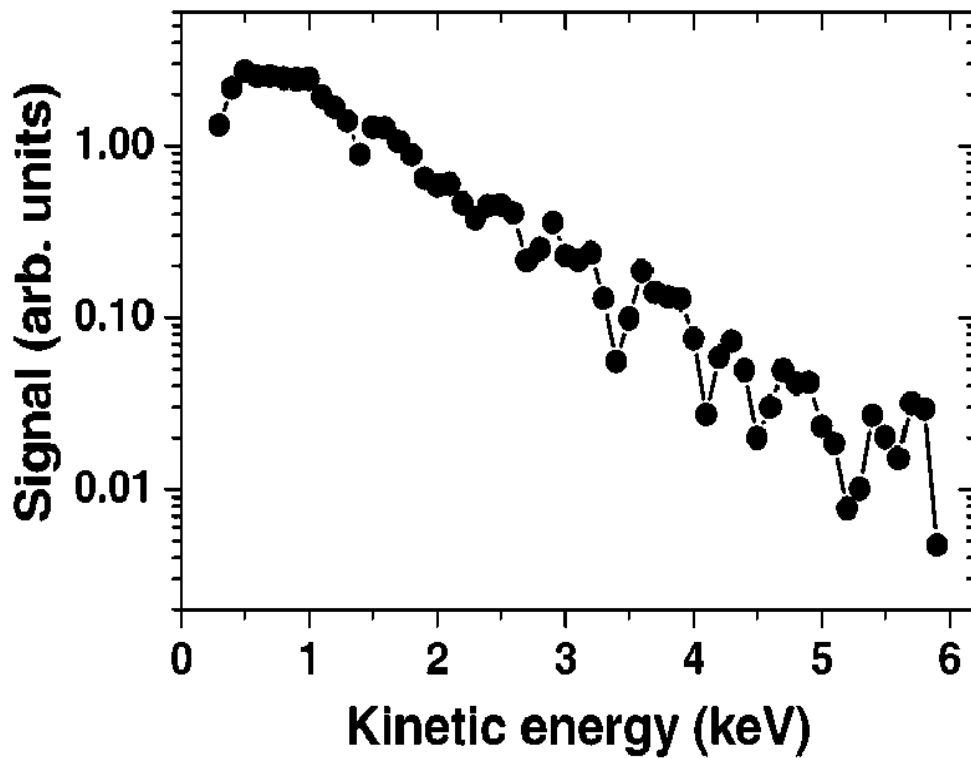


Abbildung 1.4: Gemessenes Elektronenspektrum von Xe-Clustern. Spitzenlaserintensität  $5 \times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Die Anzahl von Clusteratomen beträgt  $\sim 1.2 \times 10^4$  Atome [4].

Gezirpte Pulsverstärkung ermöglicht die Konstruktion von leistungstarken kompakten Lasern auf einem optischen Tisch. Ohne gezirpte Pulsverstärkung bräuchte man sehr große Laseranlagen, die normalerweise zur ihrer Installation mehrere Gebäude in Anspruch nehmen würden. Obwohl die Leistungstärke vergleichbar ist, ist die Gesamtenergie des Pulses in den kompakten Lasern jedoch im Vergleich zu großen Anlagen wesentlich geringer.

## 1.2 Experimentelle Beobachtungen

Seit der Demonstration von gezippter Pulsverstärkung im optischen und infraroten Bereich wurde die Ultrakurzpuls-laser-Cluster-Wechselwirkung experimentell intensiv untersucht [1, 3, 5, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Diese Untersuchungen ergaben, dass in der Tat die Cluster beinahe alle auf sie fallende Laserenergie absorbieren. Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen den Absorptionskoeffizienten als Funktion von einfallender Laserintensität bzw. Clustergröße. Die absorbierte Energie wird als Strahlung wieder vom Cluster emittiert. Diese Strahlung besteht aus Harmonischen von einfallenden Laserstrahlen, Röntgenstrahlung, Elektronen und Ionen mit verschiedenen Ladungen.

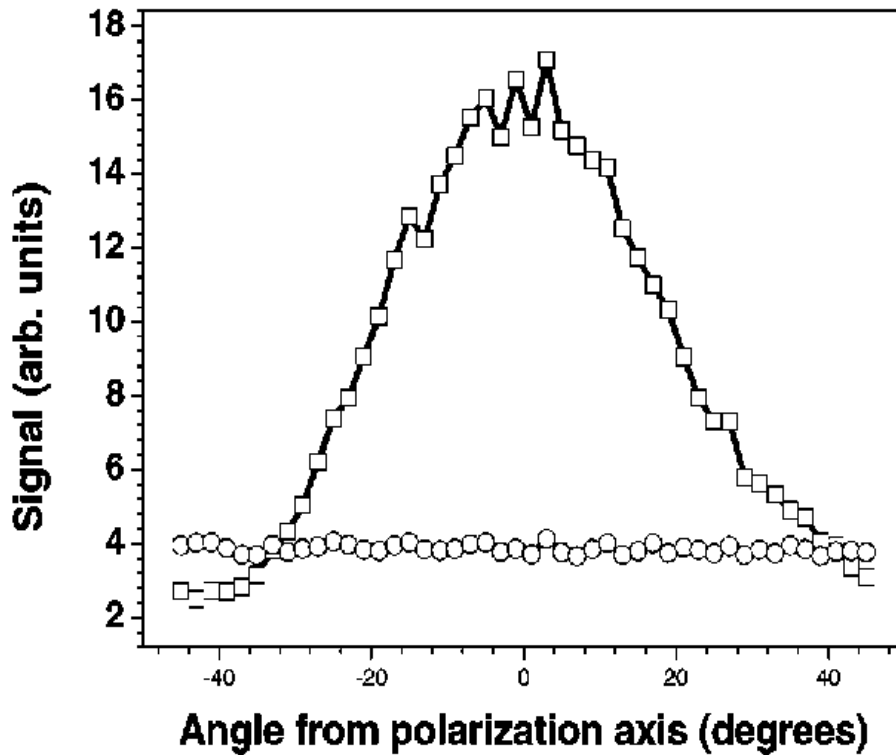


Abbildung 1.5: Winkelverteilung der Elektronen(Quadrate) und Photonen(Kreise). Spitzenlaserintensität  $5 \times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Die Anzahl von Clusterratomen beträgt  $\sim 1.2 \times 10^4$  Atomen. Das Maximum liegt in Richtung des laserelektrischen Feldes [4].

Es werden inkohärente [17, 19] als auch kohärente [18] Harmonische der einfallenden Laserstrahlung emittiert. Die Intensität der von Clustermedien emittierten Harmonischen liegt deutlich höher als die von Gasmedien gleicher Durchschnittsdichte. Wegen der erhöhten Kopplungseffizienz und Nichtlinearität der Wechselwirkung emittieren Clustermedien intensiver als Gasmedien. Dies führt auch dazu, dass im Vergleich zu Gasmedien höhere Harmonische emittiert werden. Der Konversionskoeffizient liegt bei etwa  $10^{-6}$  [3]. Abbildung 1.3 z.B. zeigt die emittierte Energie der neunten



Harmonischen von einem Xe Cluster. Es ist deutlich ersichtlich, dass die Cluster effizienter sind als das entsprechende Gasmedium.

Im Gegensatz zu den Harmonischen liegt der Konversionskoeffizient für Röntgenstrahlung bei 0.1 [14]; die Effizienz bei Festkörper - Laserwechselwirkung liegt dagegen bei etwa 0.01. Das Röntgenspektrum reicht bis zu mehreren keV [17]. Zeitaufgelöste Spektroskopie der Röntgenstrahlung von Clustern zeigt, dass sich die Röntgenemission in zwei Phasen ereignet. In der ersten kurzen Phase ( $\leq 1$  ps) wird nur weniger als 1 % der Gesamttröntgenenergie ausgestrahlt und in der folgenden langsamen Phase ( $\sim$  ns) wird dann der Rest emittiert [19].

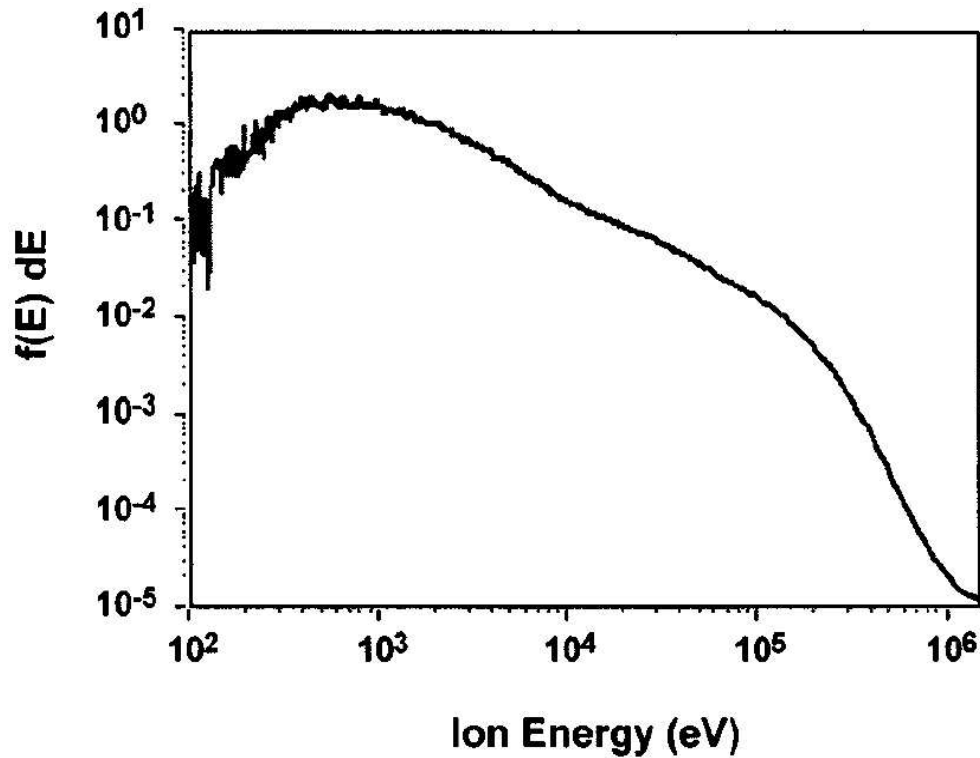


Abbildung 1.6: Ionenspektrum aus Clustern verschiedener Größe. Spitzenlaserintensität  $2 \times 10^{16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Die mittlere Energie ist 29 keV für 400 Atome/Cluster, 38 keV für 900 Atome/Cluster, 39 keV für 1600 Atome/Cluster und 41 keV für 2500 Atome/Cluster [5].

Die Abbildungen 1.4 und 1.5 zeigen das von einem Xe-Clustermedium emittierte Elektronenspektrum bzw. die Winkelverteilung der Elektronen. Die Winkelverteilung zeigt, dass die Elektronen vorzüglich in Richtung des elektrischen Feldes des Lasers emittiert werden. Die relative Breite des Spektrums läßt vermuten, dass diese Elektronen an einer kleinen Anzahl von Streuprozessen beteiligt sind. Es ist hier erwähnenswert, dass, wenn derselbe Laserpuls mit einem aus einzelnen Atomen bestehenden Gasmedium wechselwirkt, keine Elektronen mit mehr als 100 eV entstehen [5].

Abbildungen 1.6 und 1.7 zeigen das von einem Xe-Clustermedium emittierte Ionenspektrum. Es ist ersichtlich, dass Xe-Ionen bis zu 50-facher Ladungstufe erzeugt werden. Diese Ladungszustände können nicht durch

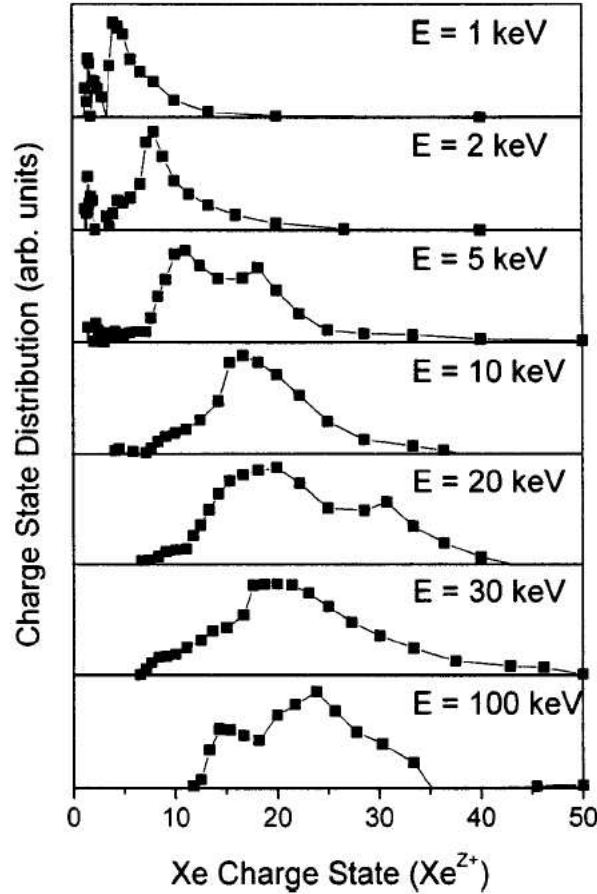


Abbildung 1.7: Gemessene Ladungszustandsverteilung aus 2500 Atom-Xe-Cluster. Spitzenlaserintensität  $2 \times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$  [5].

Tunnelionisation im Laserfeld entstehen, denn dafür würde eine Intensität von  $10^{20} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$  benötigt. Das Spektrum wurde nur mit einem Laserpuls mit Spitzenintensität von  $2 \times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$  erzeugt. Es ist bemerkenswert, dass Ionen mit Energien bis zu einem MeV aus der Cluster-Laser-Wechselwirkung entstehen.

Die Tatsache, dass Ionen mit Energien bis zu einem MeV erzeugt wurden, führte dazu, dass man mit deuteriumhaltigen Clustern experimentierte, um thermische Kernverschmelzung zu erzeugen [26, 25]. Charakteristische Fusionsneutronen werden im Rahmen von Trägheitsfusionsexperimenten in großen Anlagen als Resultat der thermischen Kernverschmelzung routinemäßig erzeugt [27]. Neutronen werden auch erzeugt während der Laser-Festkörperwechselwirkung [28]. Tatsächlich werden auch während der Wechselwirkung von einem 120 mJ 35 fs ( $\lambda = 820 \text{ nm}$ ) Laserpuls mit einem Deuteriumcluster von 50 Å Durchmesser etwa  $10^4$  Neutronen beobachtet [26].

Es muß hier betont werden, dass alle Emissionsprozesse innerhalb von einigen Nanosekunden stattfinden. Dies ist die charakteristische Expansionszeit von Clustern verwendeter Größe. Es folgt also, dass die Strahlungen in Pulsform mit Pulsdauer von höchstens einigen ns auftreten. Die Emissionen können deshalb als Sonde für Zeitauf Lösungsspektroskopie

verwendet werden. Außerdem kann die Cluster - Laserwechselwirkung als Quelle für Röntgenstrahlung für Röntgenlithographie dienen.

### 1.3 Theoretische Untersuchungen

Verschiedene Modelle wurden entwickelt, um die erhöhte Laserabsorption in Clustern und die daraus folgende Dynamik zu erklären. Am Anfang wurde vermutet, dass die hochenergetischen Röntgenstrahlungsphotonen beim Übergang in Clusteratomen entstehen, deren Innerschalenelektronen durch Multiphotonionisation entfernt wurden [17]. Die erhöhte Absorption wurde als Konsequenz von Mie Resonanzen und Plasmaresonanzen am äußeren Rande des expandierenden Clusters gedeutet [29, 30]. Diese Mutmaßungen werden jedoch durch spätere Experimente widerlegt. Die zeitaufgelöste Spektroskopie zeigte, dass die Röntgenemission nicht innerhalb fs, sondern im ns-Zeitbereich, also nach dem Abklingen des Laserpulses, stattfindet.

Zur Zeit ist die erhöhte Laserabsorption von Clustern durch folgendes Modell beschrieben [5, 31, 14]. Danach verläuft die Absorption in zwei Phasen. In der ersten Phase ionisiert der Laserpuls einige Elektronen durch Feldemission, die unter anderem nach Stoßabsorption von weiterer Laserenergie mit gebundenen Elektronen zusammenstoßen und sie dadurch ionisieren. Diese freigesetzten Elektronen absorbieren wiederum Laserenergie und ionisieren weitere gebundene Elektronen, wodurch eine Lawine von Ionisation und Erhitzung erfolgt. Da die Stoßfrequenz mit wachsender Elektronentemperatur proportional zu  $T_e^{-3/2}$  abnimmt, wird die Stoßabsorption bei fortschreitender Heizung der Elektronen schwächer. Die Elektronen expandieren und deren Dichte und damit die Plasmafrequenz, nimmt ab. Wenn die Plasmafrequenz der Laserfrequenz gleich wird, ergibt sich eine starke resonante Kupplung von Laser und Elektronenplasmawelle, wodurch die zweite und letzte Phase der starken Laserabsorption eintritt.

Das oben beschriebene Modell erklärt die experimentellen Beobachtungen nicht vollständig [5, 14, 31]. Insbesondere stimmt das nach diesem Modell berechnete Elektronen- und Ionen-Spektrum mit dem gemessenen Spektrum nicht überein. Außerdem werden wichtige Aspekte der Laserabsorption, wie nicht resonante Anregung, nicht berücksichtigt.

In dieser Arbeit stellen wir zwei ergänzende Aspekte der Laser - Clusterwechselwirkung vor. Erstens ergänzen wir die kollektive Wechselwirkung durch Berücksichtigung von nichtresonanten Anregungen. Zweitens wird gezeigt, dass der Clusterkern wie ein Atomkern mit einer effektiven Ladungszahl wirkt, der gleich der Anzahl der Atome in einem Cluster ist. Dadurch werden die Stoßfrequenz und die inverse Bremsstrahlung bedeutend verstärkt. Diese beiden zusätzlichen Effekte führen damit zu erhöhter Absorption.

Kapitel 2 beschreibt kollektive nicht resonante Anregungen, die im Rahmen eines effektiven Einteilchenmodells - des Globaldipolmodells - behandelt werden. Die Ionen werden als eine unbewegliche Kugel betrachtet, deren Ladungszahl und Radius gleich der Anzahl der Atome im Cluster

bzw. Radius des Clusters sind. Die Elektronen werden wiederum in einer ähnlichen Kugel zusammengefaßt. Die Elektronenkugel bewegt sich jedoch im kombinierten Feld der Ionenkugel und des Laserpulses. Außerdem wird der Radius der Elektronenkugel als variabel betrachtet, damit die Expansionseffekte der Elektronenwolke berücksichtigt werden können. Es wird gezeigt, dass die kollektive nichtresonante Anregung drastisch abnimmt, während die Elektronenwolke durch Erhitzung expandiert. Trotzdem genügt die Absorption, die Elektronen bis zu einigen keV zu erhitzen. Außerdem wird gezeigt, dass das Globaldipolmodell die Emission von Laserharmonischen einigermaßen quantitativ korrekt beschreibt.

In Kapitel 3 wird das chaotische Verhalten des Globaldipolmodells untersucht. Lyapunovexponenten des Modellsystems werden berechnet und es wird gezeigt, dass sich das Globaldipolmodell in einem Bereich der Spitzenlaserintensität tatsächlich chaotisch verhält.

Kapitel 4 ist der verstärkten inversen Bremstrahlung gewidmet. Zuerst wird der Impulsübertragungsquerschnitt für die Elektronenstreuung an einem Clusterkern berechnet. Mit Hilfe dieses Impulsübertragungsquerschnitts wird dann gezeigt, dass der Laserabsorptionskoeffizient eines Clustermediums zumindest eine Größenordnung höher liegt als der von einem Gasmedium mit identischer Durchschnittsdichte.

In Kapitel 5 wird die Gleichgewichtsverteilung von Elektronen in einem Cluster berechnet, wenn der Cluster in einem Hintergrundplasma eingebettet ist und sich mit diesem im thermischen Gleichgewicht befindet. Anschließend werden die effektive Ladungen von Clustern verschiedener Größe berechnet, die sich in einem Hintergrundplasma von variabler Dichte befinden. Es werden analytische Anpassungsfunktionen für die Elektronendichteverteilung außerhalb des Clusters und für die effektive Clusterladung als Funktion des Clusterradius gegeben.

Kapitel 6 faßt die Ergebnisse zusammen und weist die Möglichkeiten für Weiterentwicklung der vorgestellten Ideen und Modelle auf.

# Kapitel 2

## Nichtresonante kollektive Absorption

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist der Durchmesser der in expandierendem Gasstrahl erzeugbaren Cluster mindestens eine Größenordnung kleiner als die Wellenlängen vorhandener leistungstarker Ultrakurzpulslaser. Deshalb befindet sich der Cluster zu jeder Zeit in einem homogenen, zeitabhängigen Feld des Lasers. Da der Laserpuls stark ist, wird eine maßgebende Anzahl von Elektronen schon durch die Pulsfront ionisiert und bildet eine Wolke um den Clusterkern. Während der Dauer des Pulses bewegen sich die massiven Ionen nicht. Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Bewegung der Elektronenwolke im kombinierten Feld von Clusterkern und Laserpuls.

Abbildung 2.1 zeigt das Resultat einer PIC Simulation, die mit dem PIC-Code LPIC++ [32] durchgeführt wurde. Simuliert wurde die Dynamik eines ebenen Clusters, der durch einen oszillierenden elektrischen Puls getrieben wird<sup>1</sup>. Das elektrische Feld ist senkrecht zur Clusterebene orientiert. Es ist deutlich ersichtlich, dass die Elektronenwolke, zumindest am Anfang der Wechselwirkung, als ganzes schwingt. Dieses Bild wurde auch durch ähnliche Simulationen bestätigt [33]. Das Globaldipolmodell erklärt unter anderem das in Abbildung 2.13 gezeigte  $I_h \propto p_0^{2.9}$  Skalierungsgesetz, das die Zunahme der Intensität der Harmonischen als Funktion des Stagnationsdrucks, also der Clustergröße, darstellt [3]

### 2.1 Modellgleichungen

In Anhang A ist die Berechnung der Kraft zwischen der Ionenkugel mit Radius  $R_1$  und der Elektronenkugel mit dem Radius  $R_2 (\geq R_1)$  durchgeführt. Die rücktreibende Kraft zwischen den Kugeln ist

---

<sup>1</sup>Die Simulation eines sphärischen Clusters wurde nicht durchgeführt weil kein 3D-PIC Code zur Verfügung stand. Die Entwicklung von einem 3D-PIC Code ist mit erheblichem Aufwand verbunden.

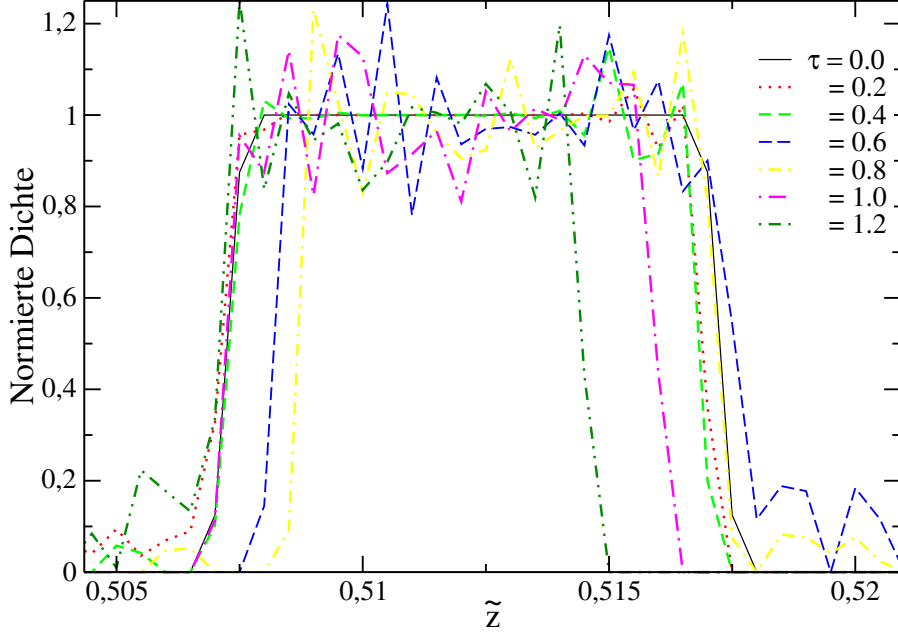


Abbildung 2.1: Elektronendichteprofil eines ebenen Clusters für verschiedene Zeiten. Die Zeiten sind in Einheiten von Laserperioden angegeben. Die Laserwellenlänge wurde als  $1 \mu\text{m}$  angenommen. Laserspitzenintensität  $5.48 \times 10^{18} \text{W.cm}^{-2}$ , Pulsedauer 6 Laserperioden. Elektronendichte  $n_e = 10^{29} \text{m}^{-3}$ . Daraus folgt:  $\omega/\omega_0 = 0.1$ , wobei  $\omega$  die Laserfrequenz und  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz für kleine Auslenkungen sind.

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} f_s(r_n, r_a). \quad (2.1)$$

Hier ist  $r_a = R_1/R_2$ ,  $\mathbf{r}$  der Auslenkungsvektor,  $r_n = |\mathbf{r}|/R_2$ ,  $q$  ist die gesamte Ladung der Ionenkugel und

$$f_s(r_n, r_a) = r_a^2 \begin{cases} r_n & \text{für } r_n \leq 1 - r_a; \\ 3(a_1 r_n^{-2} - a_2 + a_3 r_n - a_4 r_n^2 + a_5 r_n^4) & \text{für } 1 - r_a \leq r_n \leq 1 + r_a; \\ 1/r_n^2 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.2)$$

wobei

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{48} \left( \frac{1}{r_a^3} + r_a^3 \right) - \frac{3}{16} \left( \frac{1}{r_a} + r_a \right) \right], \quad a_2 = \frac{3}{32} \left( \frac{1}{r_a^3} - \frac{2}{r_a} + r_a \right), \quad (2.3)$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{r_a^3} + 1 \right), \quad a_4 = \frac{3}{32 r_a} \left( \frac{1}{r_a^2} + 1 \right), \quad \text{und } a_5 = \frac{1}{96 r_a^3}. \quad (2.4)$$

Dieses Kraftfeld definiert ein Potentialfeld (bis auf eine additive Konstante) durch

$$\nabla \Phi_s(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_s(\mathbf{r}). \quad (2.5)$$

Das Potentialfeld, das am  $\mathbf{r} = 0$  verschwindet, ist dann gegeben durch

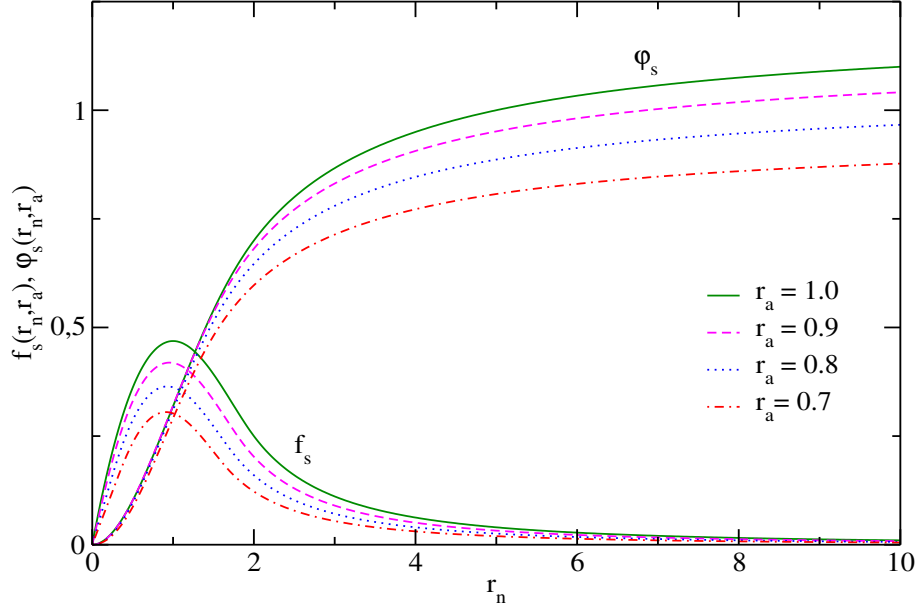


Abbildung 2.2:  $f_s(r_n, r_a)$  und  $\varphi_s(r_n, r_a)$  als Funktionen von  $r_n$  für verschiedene Werte von  $r_a$ .

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \varphi_s(r_n, r_a), \quad (2.6)$$

wobei

$$\varphi_s(r_n, r_a) = r_a \begin{cases} r_n^2/2 & \text{für } r_n \leq 1 - r_a; \\ 3[b - a_1/r_n - a_2 r_n + a_3 r_n^2/2 - a_4 r_n^3/3 + a_5 r_n^4/5] & \text{für } 1 - r_a \leq r_n \leq 1 + r_a; \\ 0.3(5 - r_a^2) - 1/r_n & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Hier ist  $b = (1 - r_a)^2(1 + 2r_a - 2r_a^2 - r_a^3)/(20r_a^3)$ . Abbildung 2.2 zeigt den Verlauf von  $f_s(r_n, r_a)$  und  $\varphi_s(r_n, r_a)$  als Funktionen von  $r_n$  für verschiedene Werte von  $r_a$ .

Es folgt, daß für die Fluchtenergie

$$\mathcal{E}_f = 0.3r_a(5 - r_a^2) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (2.8)$$

gilt.

Weil die Laserwellenlänge mindestens eine Ordnung größer ist als der Clusterradius, kann man bzgl. des Laserfeldes die Elektronenkugel als Punktteilchen betrachten. Demzufolge besteht das Modell aus einem Punktteilchen, das sich im Potentialfeld (2.7) bewegt und gleichzeitig von einem Laserpuls bestrahlt wird.

Die Bewegungsgleichung des Teilchens lautet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) &= \frac{1}{M} [\mathbf{F}_s(\mathbf{r}) - q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \\
&= -\frac{\omega_p^2}{3} R_1 f_s(r_n, r_a) \mathbf{e}_r - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.9)
\end{aligned}$$

wobei  $M$  und  $m_e$  die Massen der Elektronenkugel bzw. des Elektrons sind, und  $\omega_p$  die Plasmafrequenz des Clustermaterials ist. Das elektrische Feld ist gegeben als

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 g(t, z, \psi), \quad (2.10)$$

wobei

$$g(t, z, \psi) = \theta[n\pi - (\omega t - kz)] \sin[(\omega t - kz)/n] \theta(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz + \psi) \quad (2.11)$$

und  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}/c$  ist. d.h., das elektrische Feld des Laserpulses ist in  $x$ -Richtung polarisiert und der Puls pflanzt sich in  $z$ -Richtung fort. Die Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf von  $g(t, z, \psi)$  für eine bestimmte Zeit. Die Pulsform bleibt dieselbe, während der Puls in  $z$ -Richtung propagiert. Die Phase  $\psi$  ist eingeführt, um mögliche Effekte zu studieren, die durch Phasen  $\psi \neq 0$  entstehen können.

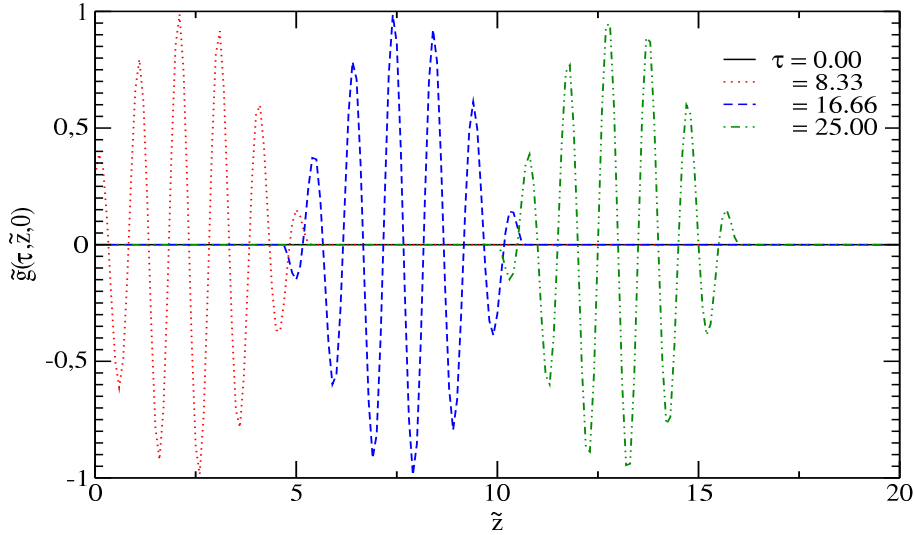


Abbildung 2.3: Die Pulsform  $\tilde{g}(\tau, \tilde{z}, \psi)$  für verschiedene Zeiten.

Wir ersetzen  $\gamma \mathbf{v}$  in (2.9) durch  $\mathbf{u}$  und dividieren durch  $c$ ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) = -\frac{eE_0}{m_e c} \left( \mathbf{e}_x + \frac{\mathbf{u}}{\gamma c} \times \mathbf{e}_y \right) g(t, z, \psi) - \frac{\omega_p^2}{3} \frac{R_1}{c} f_s(r_n, r_a) \mathbf{e}_r. \quad (2.12)$$



Wir transformieren die Gleichung (2.12) in dimensionslose Form, indem wir alle Zeiten in der Einheit der Laserperiode und alle Längen in der Einheit von Laserwellenlänge darstellen, d.h.: Wir führen die Transformation  $t = \tau T$ ,  $r = \tilde{r}\lambda$ , und  $R = \tilde{R}\lambda$  durch, wobei  $T$  die Laserperiode und  $\lambda$  die Laserwellenlänge sind. Es folgt:

$$\gamma^2 = (1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2})^{-1} = [1 - (\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau})^2]^{-1} = 1 + (\frac{\mathbf{u}}{c})^2 \quad (2.13)$$

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \gamma \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}; \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \quad (2.14)$$

und

$$\omega t - kz = 2\pi(\tau - \tilde{z}). \quad (2.15)$$

Gleichung (2.12) transformiert sich in

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{\mathbf{u}}{c}) = -\nu \left( \mathbf{e}_x + \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \times \mathbf{e}_y \right) \tilde{g}(\tau, \tilde{z}, \psi) - (2\pi \frac{\omega_0}{\omega})^2 \tilde{R}_1 f_s(r_n, r_a) \mathbf{e}_r. \quad (2.16)$$

wobei  $\omega_0^2 = \omega_p^2/3$ ,  $\nu = \frac{eE_0\lambda}{m_e c^2}$ ,

$$\tilde{g}(\tau, \tilde{z}, \psi) = \theta[\frac{n}{2} - (\tau - \tilde{z})] \sin[2\pi(\tau - \tilde{z})/n] \theta(\tau - \tilde{z}) \sin[2\pi(\tau - \tilde{z}) + \psi], \quad (2.17)$$

und

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = \frac{\mathbf{u}}{\gamma c} \quad (2.18)$$

ist. Die Anfangswerte sind  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{r}}(0) = 0$ . Wie wir später sehen werden ist  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz für kleine Auslenkungen.

Man sieht sofort, dass in der  $y$ -Richtung keine Kraft wirkt. Infolge der Anfangsbedingung bewegt sich das Teilchen nur in der  $xz$ -Ebene.

Die gesamte Energie des Teilchens ist

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= Mc^2(\gamma - 1) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \varphi_s(r_n, r_a) \\ &= Mc^2[(\gamma - 1) + \tilde{R}_1^2 \delta^2 \varphi_s(r_n, r_a)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei  $\delta = 2\pi\omega_0/\omega$  ist.

Die von dem Teilchen absorbierte Energie kann auch berechnet werden, indem man die durch das Laserfeld verursachte Kraft mit der Geschwindigkeit des Teilchens multipliziert und das Ganze über die Zeit integriert:

$$\mathcal{E}_p = -\frac{4\pi}{3} R_1^3 z_i n_i e E_0 \lambda \int_0^{n/2} d\tau \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \tilde{g}(\tau, \tilde{z}, \psi), \quad (2.20)$$

wobei  $\lambda$  die Laserwellenlänge ist.

Es muß hier unterstrichen werden, dass der Ausdruck (2.19) nur für konstante  $r_a$  gültig ist. Wenn  $r_a$  variiert während der Dauer des Pulses, dann gibt der Ausdruck (2.19) von dem Teilchen absorbierte Energie nicht wieder, da sich dann das Potential mit der Zeit ändert. Dagegen gibt der Ausdruck (2.20) die von der Kugel absorbierte Energie immer korrekt wieder.

Wir definieren den Bruchteil der absorbierten Energie  $f_a$  als die Energie des Teilchens nach dem Abklingen des Lasers dividiert durch die gesamte auf die Elektronenkugel gefallene Energie. Die eingefallene Energie hängt vom Querschnitt der Elektronenwolke ab. Dieser Querschnitt ist bestimmt durch viele, nicht einfach berechenbare, Faktoren. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass diese Wolke kugelförmig ist und deren Radius während des Einfalls des Lasers gleichmäßig von  $R_1$  bis  $R_2$  zunimmt. Natürlich kann man auch andere Expansionformen einbeziehen. Unter Annahme der linearen Expansion ist die gesamte auf einen Cluster eingefallene Energie

$$\mathcal{E}_L = \int_0^{nT/2} \pi \left[ R_1 + \frac{(R_2 - R_1)}{nT/2} t \right]^2 I_0 \sin^2(\omega t/n) \sin^2(\omega t). \quad (2.21)$$

Offensichtlich ist  $I_0$  die Spitzenintensität des Laserpulses. Das Integral kann einfach durchgeführt werden und man erhält

$$\mathcal{E}_L = \frac{\pi R_1^2 I_0 n T}{8 r_a^2} \left\{ \frac{(1 + r_a + r_a^2)}{3} + \frac{(1 - r_a)}{2\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left[ (1 - r_a) - \frac{n^2 [(-1)^n - 1]}{(n^2 - 1)^2} \right] \right\}. \quad (2.22)$$

Normalerweise ist  $n$  um die Größenordnung von 10. Deshalb kann man  $1 + 1/n^2$  durch 1 und  $n^2/(n^2 - 1)^2$  durch 0 approximieren. Dadurch ergibt sich

$$\mathcal{E}_L = \pi R_1^2 I_0 \frac{nT}{8} h(r_a), \quad (2.23)$$

wobei

$$h(r_a) = \frac{1}{r_a^2} \left[ \frac{(1 + r_a + r_a^2)}{3} + \frac{(1 - r_a)^2}{2\pi^2} \right]. \quad (2.24)$$

Die Beziehung (2.23) wiederum kann für etwa  $r_a \leq 0.1$  approximiert werden durch

$$\mathcal{E}_L = \pi R_1^2 I_0 \frac{nT}{8} \frac{1}{r_a^2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \right). \quad (2.25)$$

Es folgt:

$$f_a = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_L} = \frac{64 \tilde{R}_1}{n h(r_a)} \left( \frac{n_e m_e c^3}{6 I_0} \right) [(\gamma - 1) + \tilde{R}_1^2 \delta^2 \varphi_s(r_n, r_a)]. \quad (2.26)$$

Man kann auch den Absorptionquerschnitt des Clusters definieren als  $\sigma_C = \pi R_1^2 h(r_a) f_a$ . Der Absorptionsquerschnitt ermöglicht die Berechnung

des Absorptionskoeffizienten  $k_C = n_C \sigma_C$  im Clustermedium. Der Plasmaabsorptionskoeffizient  $k_i$  ist gegeben durch

$$k_i = \frac{n_e}{n_{cr}} \frac{\nu_{ei}}{c}. \quad (2.27)$$

Es folgt,

$$\frac{k_C}{k_i} = \pi R_1^2 h(r_a) f_a \frac{\kappa n_{cr} c}{\nu \nu_{ei}}. \quad (2.28)$$

Hier ist  $n_{cr}$  die kritische Dichte,  $\nu$  ist die Anzahl der Atome im Cluster, und  $\kappa$  ist der Bruchteil des in Cluster umgewandelten Gases. Für typische Werte,  $n_C = 10^{28} \text{m}^{-3}$ ,  $R_1 = 50 \text{\AA}$ ,  $\nu = 10^4$ ,  $\nu_{ei} = 10^{13} \text{s}^{-1}$  und  $h(r_a) f_a = 0.5$  folgt  $k_C/k_i = 10^3 \kappa$ .

## 2.2 Lösungen

Aus der Lösung von dem Gleichungssystem (2.16)-(2.18) kann  $f_a$  berechnet werden. Das Gleichungssystem ist nichtlinear und kann im allgemeinen Fall nicht analytisch gelöst werden. Im weiteren werden, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt nur die Laserpulse im Betracht gezogen, bei denen  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$  im Vergleich zur  $E$  vernachlässigt werden kann. Damit beschränkt sich die Bewegung der Elektronenkugel nur in die Richtung des elektrischen Feldes des Lasers, d.h. nur auf die x-Achse, und wir können  $\tilde{z} = 0$  überall einsetzen.

### 2.2.1 Niedrige Intensitäten - harmonischer Oszillator

Für niedrige Laserintensitäten ( $\sim 10^{13} \text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ ) ist die Auslenkung der Elektronenkugel klein im Vergleich zu den Kugelradien und die Bewegung ist nichtrelativistisch. Deshalb kann in Gleichung (2.16)  $\gamma$  durch 1 und  $f_s(r_n, r_a)$  durch  $r_a^2 r_n$  ersetzt werden. Das Gleichungssystem (2.16)-(2.18) reduziert sich dann zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tau^2} + \delta^2 r_a^3 \tilde{x} &= -\nu \tilde{g}(\tau, 0) \\ &= -\nu \sin(2\pi\tau/n) \sin(2\pi\tau + \psi), \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit Anfangswerten  $\tilde{x}(0) = d\tilde{x}(0)/d\tau = 0$ .

Also wird sich der Cluster im Rahmen unseres Modells für kleine Laserintensitäten wie ein eindimensionaler harmonischer Oszillator verhalten, der von einem elektrischen Puls angetrieben wird.

### Klassische Lösung

Die Gleichung (2.29) kann analytisch gelöst werden. Es ist zu beachten, dass  $r_a$  in Gleichung (2.29) nur als ein Multiplikator zu  $\delta^2$  fungiert. Deshalb kann man  $r_a = 1$  setzen, und wenn man will, später die explizite Abhängigkeit

durch Ersetzen von  $\delta$  durch  $\delta r_a^{3/2}$  wiedergewinnen. In diesem Abschnitt ist also  $r_a$  gleich 1 gesetzt. Die Lösung lautet

$$\tilde{x}(\tau) = \frac{\nu}{4\delta^2} \left\{ \frac{1}{\beta_1 - 1} \left[ -\cos\left(2\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau + \psi\right) + \cos(\eta\tau + \psi) \right] \right. \\ + \frac{1}{\beta_1 + 1} \left[ \cos\left(2\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau + \psi\right) - \cos(\eta\tau - \psi) \right] \\ + \frac{1}{\beta_2 - 1} \left[ \cos\left(2\pi\left(1 + \frac{1}{n}\right)\tau + \psi\right) - \cos(\eta\tau + \psi) \right] \\ \left. + \frac{1}{\beta_2 + 1} \left[ -\cos\left(2\pi\left(1 + \frac{1}{n}\right)\tau + \psi\right) + \cos(\eta\tau - \psi) \right] \right\}, \quad (2.30)$$

wobei  $\beta_1 = \frac{\omega}{\omega_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  und  $\beta_2 = \frac{\omega}{\omega_0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , und  $\eta = \frac{2\pi}{\omega/\omega_0}$ .

Weil wir nur an der Energie interessiert sind, die nach dem Abklingen des Lasers im Teilchen gespeichert ist, brauchen wir nur die Lösung und deren Ableitung zur "Zeit"  $n/2$ .

$$\tilde{x}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{-\nu}{4\delta^2} \left\{ \frac{1}{\beta_1 - 1} \left[ -\cos(\pi(n - 1) + \psi) + \cos(\mu + \psi) \right] \right. \\ + \frac{1}{\beta_1 + 1} \left[ \cos(\pi(n - 1) + \psi) - \cos(\mu - \psi) \right] \\ + \frac{1}{\beta_2 - 1} \left[ \cos(\pi(n + 1) + \psi) - \cos(\mu + \psi) \right] \\ \left. + \frac{1}{\beta_2 + 1} \left[ -\cos(\pi(n + 1) + \psi) + \cos(\mu - \psi) \right] \right\}, \quad (2.31)$$

wobei  $\mu = \frac{n\pi}{\omega/\omega_0}$ . Nach einigen algebraischen Operationen erhält man für  $\psi = 0$

$$\tilde{x}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{-\nu}{4\delta^2} \left[ \frac{8}{n(\beta_1^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)} (\omega/\omega_0)^2 \right] [(-1)^n + \cos(\mu)]. \quad (2.32)$$

Ähnlich ergibt sich

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{-\nu}{4\delta} \left\{ \frac{1}{\beta_1 - 1} [\beta_1 \sin(\pi(n - 1) + \psi) - \sin(\mu + \psi)] \right. \\ + \frac{1}{\beta_1 + 1} [-\beta_1 \sin(\pi(n - 1) + \psi) + \sin(\mu - \psi)] \\ + \frac{1}{\beta_2 - 1} [-\beta_2 \sin(\pi(n + 1) + \psi) + \sin(\mu + \psi)] \\ \left. + \frac{1}{\beta_2 + 1} [\beta_2 \sin(\pi(n + 1) + \psi) - \sin(\mu - \psi)] \right\} \quad (2.33)$$

und für  $\psi = 0$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\nu}{4\delta} \left[ \frac{8}{n(\beta_1^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)} (\omega/\omega_0)^2 \right] \sin(\mu) \quad (2.34)$$

Die vom Oszillator absorbierte Energie ist

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2}Mc^2 \left[ \left( \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right)^2 + \delta^2 \tilde{x}^2 \right]. \quad (2.35)$$

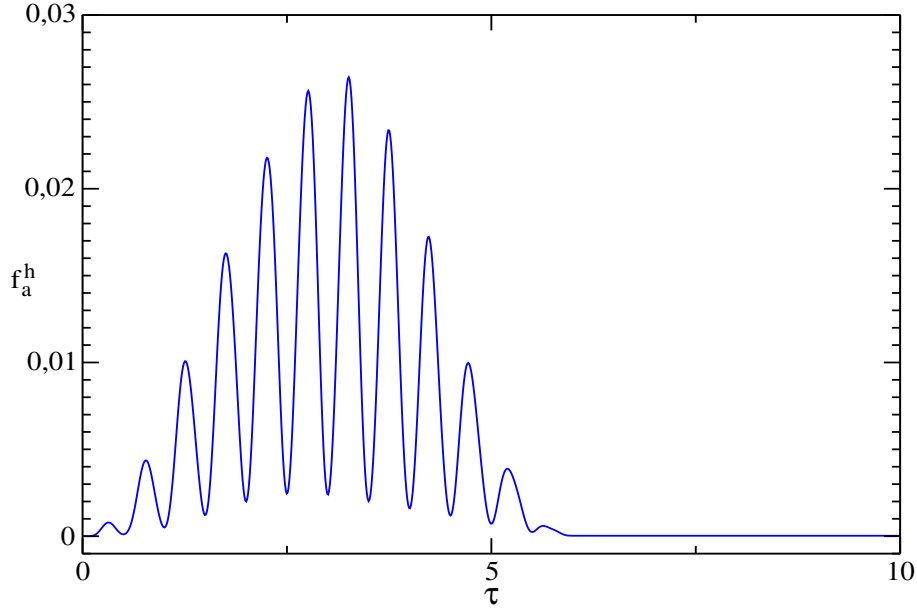


Abbildung 2.4: Der Bruchteil der von harmonischen Oszillatoren absorbierten Energie als Funktion der Zeit.  $I_0 = 10^{22} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ ,  $\omega/\omega_0 = 0.3$ . Wiederum ist  $\omega$  die Laserfrequenz und  $\omega_0$  ist die Eigenfrequenz des Oszillators.

Abbildung 2.4 zeigt die Energie des harmonischen Oszillators als Funktion der Zeit für  $\omega/\omega_0 = 0.3$ . Wie erwartet bleibt beim Abklingen des Laserpulses nur sehr geringe Energie beim Oszillator.

Einsetzen von (2.31) und (2.33) in (2.35) und Division durch die gesamte auf die Elektronenkugel eingefallene Energie ergibt den Bruchteil der absorbierten Energie als

$$f_a^h = \frac{2\tilde{R}}{n} \left[ \frac{8}{n(\beta_1^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)} (\omega/\omega_0)^2 \right]^2 [1 + (-1)^n \cos(\mu)]. \quad (2.36)$$

Es ist zu vermerken, dass  $f_a^h$  von der Intensität des Laserpulses unabhängig ist. Abbildung 2.5 zeigt den Verlauf von  $f_a^h$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$ . Es ist offensichtlich dass der Bruchteil der vom harmonischen Oszillator absorbierten Energie sehr niedrig ist.

### Quantenmechanische Berechnung der Absorption des harmonischen Oszillators

Es ist sehr instruktiv, die Absorptionsprozesse quantenmechanisch zu betrachten. Deshalb haben wir die Energieabsorption eines harmonischen Oszillators berechnet, der mit obengegebenem Laserpuls bestrahlt wird.

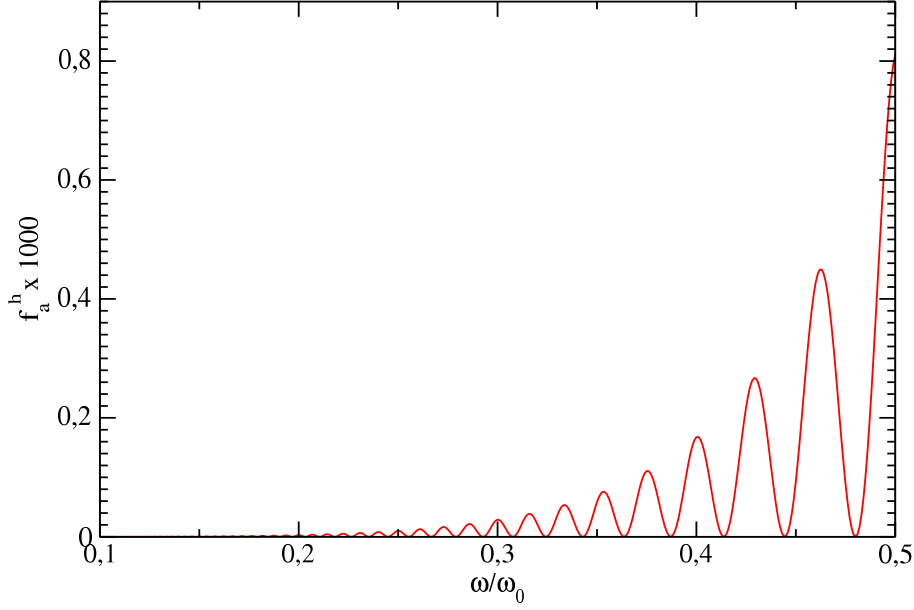


Abbildung 2.5: Der Bruchteil der von harmonischen Oszillatoren absorbierten Energie als Funktion von  $\omega/\omega_0$ ;  $n = 12$ . Der Bruchteil ist unabhängig von  $I_0$ .

Die Rechnung wurde im Rahmen von Störungstheorie erster Ordnung durchgeführt. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist  $w_{nm}(\tau)$  für ein System durch eine für die Zeit  $\tau$  dauernde Störung des Anfangszustands  $|m\rangle$  bis zum Endzustand  $|n\rangle$  gegeben durch [34],

$$w_{nm}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\tau \langle n | W(t) | m \rangle e^{i\omega_{nm}t} dt \right|^2, \quad (2.37)$$

wobei  $W(t)$  der Störoperator und  $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$  sind.

Der Wechselwirkungsoperator für ein Teilchen ohne Spin in einem elektromagnetischen Feld ist gegeben durch [35],

$$W(t) = -\frac{e}{Mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2Mc^2} \mathbf{A}^2, \quad (2.38)$$

wobei  $\mathbf{A}$  das Vektorpotential des Feldes ist.  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{E}$  sind verknüpft durch  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . Im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung wird der zweite Term in (2.38) vernachlässigt. Für den durch (2.10) gegebenen Puls, folgt:

$$\mathbf{A} = \frac{E_0 c}{4i\omega} \mathbf{e}_x f(t), \quad (2.39)$$

wobei

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin[(\omega t - kz)(1-1/n)]}{(1-1/n)} - \frac{\sin[(\omega t - kz)(1+1/n)]}{(1+1/n)} & \text{für } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\langle n | W(t) | m \rangle = \frac{eE_0}{4i\omega Mc} f(t) \langle n | \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{p} | m \rangle \quad (2.41)$$

Aber [34]

$$\langle n | \mathbf{p} | m \rangle = iM\omega_{nm} \langle n | \mathbf{r} | m \rangle. \quad (2.42)$$

Es folgt

$$\langle n | W(t) | m \rangle = \frac{eE_0}{4i\omega Mc} f(t) \langle n | x | m \rangle. \quad (2.43)$$

Für harmonische Oszillatorzustände  $|n\rangle$ , und  $|m\rangle$ , gilt [36],

$$\langle n | x | m \rangle = \left[ \frac{n\hbar}{2M\omega_0} \right]^2 \delta_{m,n-1} + \left[ \frac{(n+1)\hbar}{2M\omega_0} \right]^2 \delta_{m,n+1}. \quad (2.44)$$

Aus (2.44) ist ersichtlich, dass ein Oszillator der sich im Grundzustand befindet, durch niedrigste Ordnungsstörung nur zum ersten angeregten Zustand gelangen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist dann:

$$W_{0,1}(\tau) = \frac{eE_0}{32\hbar\omega_0 M(\omega/\omega_0)^2} \left| \int_0^\tau f(t) e^{i\omega_0 t} dt \right|^2. \quad (2.45)$$

Das Integral ist einfach durchzuführen.

$$\int_0^\tau f(t) e^{i\omega_0 t} dt = -\frac{8}{n\omega_0} \left[ e^{i\mu} (-1)^n + 1 \right] \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \frac{1}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}, \quad (2.46)$$

und daraus

$$\left| \int_0^\tau f(t) e^{i\omega_0 t} dt \right|^2 = 2 \left[ \frac{8}{n\omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \frac{1}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \right]^2 \left[ 1 + (-1)^n \cos(\mu) \right]. \quad (2.47)$$

Die vom harmonischen Oszillator absorbierte Energie ist  $\hbar\omega_0 W_{0,1}(\tau)$ . Das Ergebnis ist identisch mit dem klassisch berechneten Ergebnis (2.36).

## 2.2.2 Höhere Intensitäten

Bei höheren Intensitäten muß das Gleichungssystem (2.16)-(2.18) vollständig gelöst werden. Wegen dem nicht-linearen Charakter des Systems kann dieses nicht analytisch bewältigt werden. Deshalb werden die Gleichungen numerisch gelöst.

### Der Fall $r_a = 1$

In diesem Fall werden die Expansionseffekte der Elektronenkugel vernachlässigt. Das Gleichungssystem (2.16)-(2.18) bleibt natürlich unverändert und die Funktionen  $f_s(r_n, r_a)$  und  $\varphi_s(r_n, r_a)$  nehmen die einfache Form

$$f_s(r_n, 1) = \begin{cases} r_n - \frac{9}{16}r_n^2 + \frac{1}{32}r_n^4 & \text{für } r_n \leq 2; \\ \frac{1}{r_n^2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.48)$$

und

$$\varphi_s(r_n, 1) = \begin{cases} \frac{1}{2}r_n^2 - \frac{3}{16}r_n^3 + \frac{1}{160}r_n^5 & \text{für } r_n \leq 2 \\ \frac{1}{r_n} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.49)$$

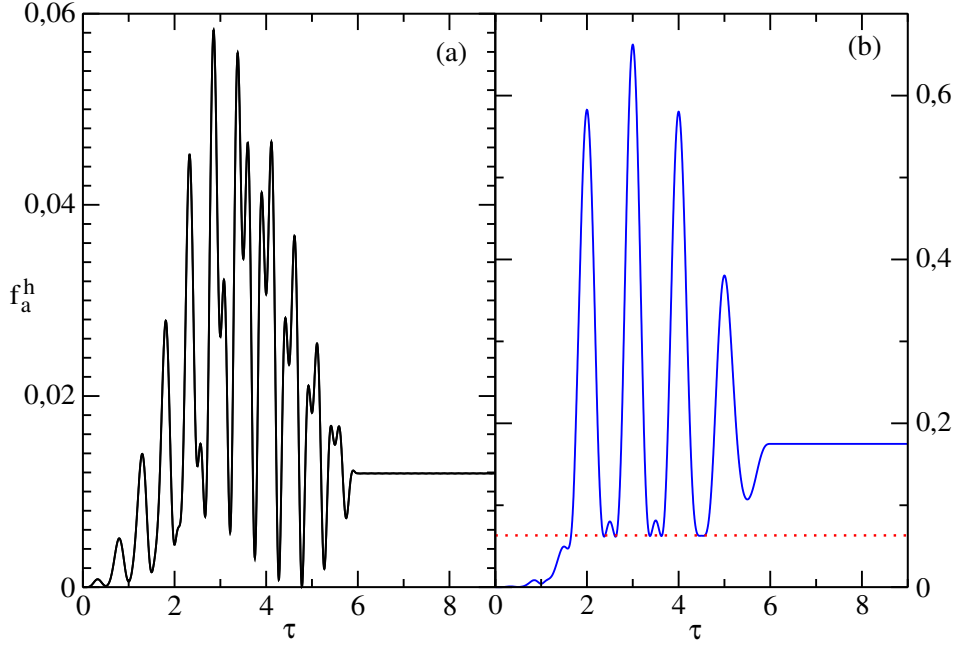


Abbildung 2.6: Der Bruchteil der vom Cluster absorbierten Energie als Funktion der Zeit.  $R = 50\text{\AA}$  und  $\omega/\omega_0 = 0.3$ . Abbildung (a) zeigt den Fall für  $I_0 = 10^{21} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Die maximale Energie des Teilchens ist immer niedriger als die Fluchtenergie. Das Teilchen bleibt an den Clusterkern gebunden. Abbildung (b) zeigt den Fall für  $I_0 = 10^{22} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Die punktierte Linie kennzeichnet die Fluchtenergieschwelle. Nach dem Abklingen des Laserpulses bleibt die Teilchenenergie größer als die Fluchtenergie; das Teilchen trennt sich vom Clusterkern.

an.

Abbildungen 2.6(a) und 2.6(b) zeigen die gesamte Energie des Teilchens für zwei verschiedene Intensitäten. Wie man aus Abbildung 2.6(b) ersehen kann, hat in diesem Fall das Teilchen mehr als die Fluchtenergie absorbiert und sich vom Clusterkern vollständig befreit.

Abbildung 2.7 zeigt  $f_a$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ . Die Rolle der nichtresonanten kollektiven Anregung im Laserheizen von Clustern ist klar zu erkennen in der nicht verschwindenden Absorption im Gegensatz zum harmonischen Oszillator außerhalb der Resonanzfrequenz.

Die Bedeutung der nichtresonanten Anregung ist deutlicher zu sehen wenn wir die absorbierte Energie, nicht die Absorptionseffizienz, als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$  darstellen. Abbildung 2.8 zeigt  $\mathcal{E}_p/Mc^2$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ .

### Der Fall $r_a \neq 1$ - Expandierende Elektronenkugel

Nun betrachten wir den Fall, in dem die Elektronenkugel während der Dauer des Laserpulses wegen der Heizung expandiert. Eine vollständige Beschreibung des Expansionvorgänge würde eine vollständige Kenntnis der Laserabsorption und der Verteilung der absorbierten Energie auf verschie-



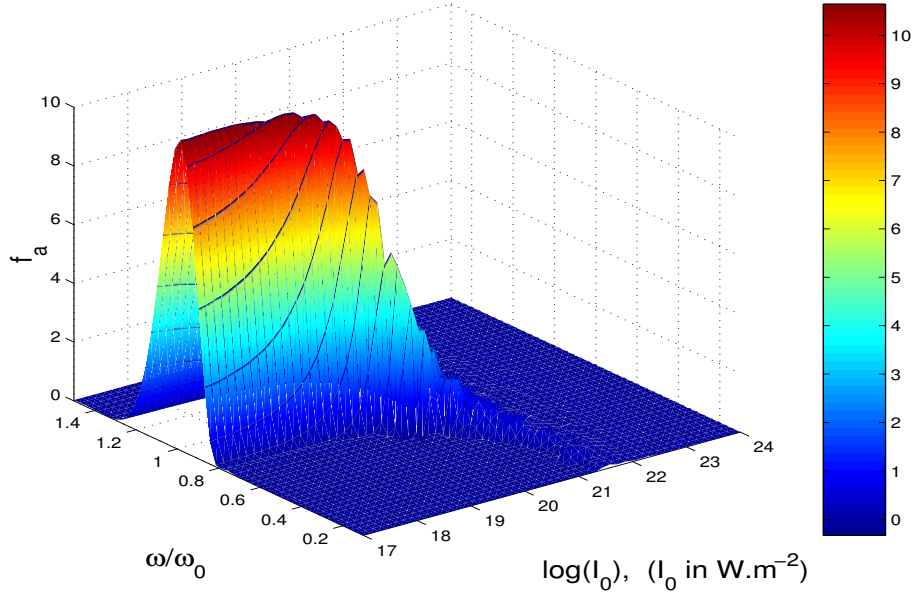


Abbildung 2.7: Der Bruchteil der vom Cluster absorbierten Energie  $f_a$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ .  $R = 50\text{\AA}$  und  $n = 12$ . Mit zunehmender Intensität verschiebt sich das Maximum in Richtung niedriger Frequenzen. Das ergänzende Konturdiagramm ist Abbildung 3.2.

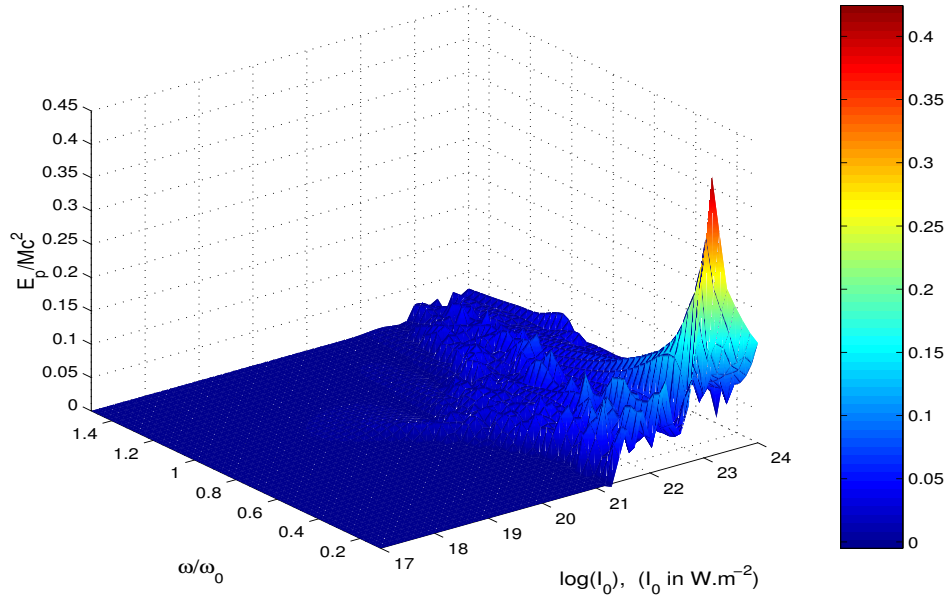


Abbildung 2.8:  $\mathcal{E}_p/Mc^2$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ .  $R = 50\text{\AA}$  und  $n = 12$ . Das ergänzende Konturdiagramm ist Abbildung 3.1.

denen Freiheitsgraden und natürlich auch der Abkühlung durch Emission von Teilchen und Strahlung erfordern. Diese Kenntnis liegt zur Zeit aber nicht vor. Deshalb wird angenommen, dass der Elektronenkugelradius infolge der Heizung durch das Laserpuls von seinem Anfangswert  $R_1$  einfach

linear bis  $R_2$  anwächst.

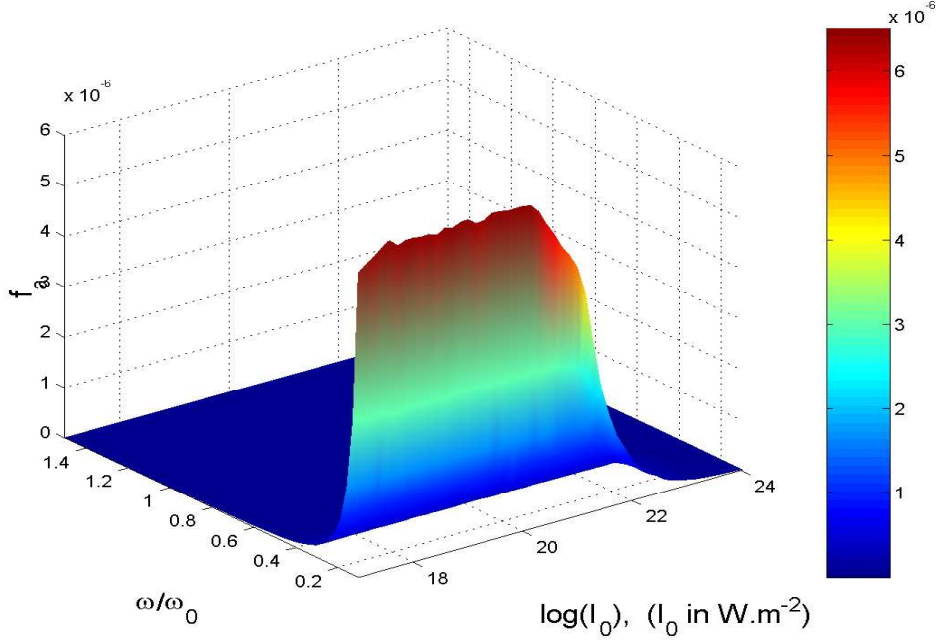


Abbildung 2.9: Der Bruchteil der vom Cluster absorbierten Energie als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ . Anfangsradius des Clusters  $R = 50\text{\AA}$ , und  $n = 12$ . Der Radius der Elektronenkugel wächst linear von  $R$  zu  $70R$  während der Dauer des Laserpulses.

Die Abbildung 2.9 zeigt den Bruchteil der absorbierten Energie  $f_a$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ . Die sehr niedrigen Werte von  $f_a$  besagen, dass die Effizienz der nicht-resonanten Anregungen mit der Expansion der Elektronenkugel drastisch abnimmt. Diese Abnahme ist, wie die Abbildung 2.2 zeigt, mit der Abnahme der Tiefe des Potentials mit der Abnahme von  $r_a$  verbunden. Mit anderen Worten, während die Elektronenkugel expandiert, nimmt die Anziehungskraft zwischen der Elektronenkugel und der Ionenkugel ab. Also ähnelt die Bewegung des Teilchen zunehmend der eines freien Teilchens in einem Laserpuls. Abbildung 2.10 zeigt  $\mathcal{E}_p/Mc^2$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$  wenn die Elektronenkugel wie oben expandiert. Aus dieser Abbildung ist ersichtlich, dass die Elektronen im Rahmen des Globaldipolmodells durchschnittlich bis zu einigen keV erhitzt werden können.

### 2.2.3 Vergleich von Globaldipolmodell mit PIC-Simulation für ebene Cluster

Ein Vergleich von Folgerungen des Globalmodells mit entsprechenden PIC - Ergebnissen ist hilfreich bei der weitere Aufklärung von Laserabsorption in Clustern. Wir betrachten einen Planarcluster, der in der xy-Ebene unendlich ausgedehnt ist. Um die Absorption des Globaldipolmodells zu studieren, wird dem Cluster ein in z-Richtung oszillierendes elektrisches

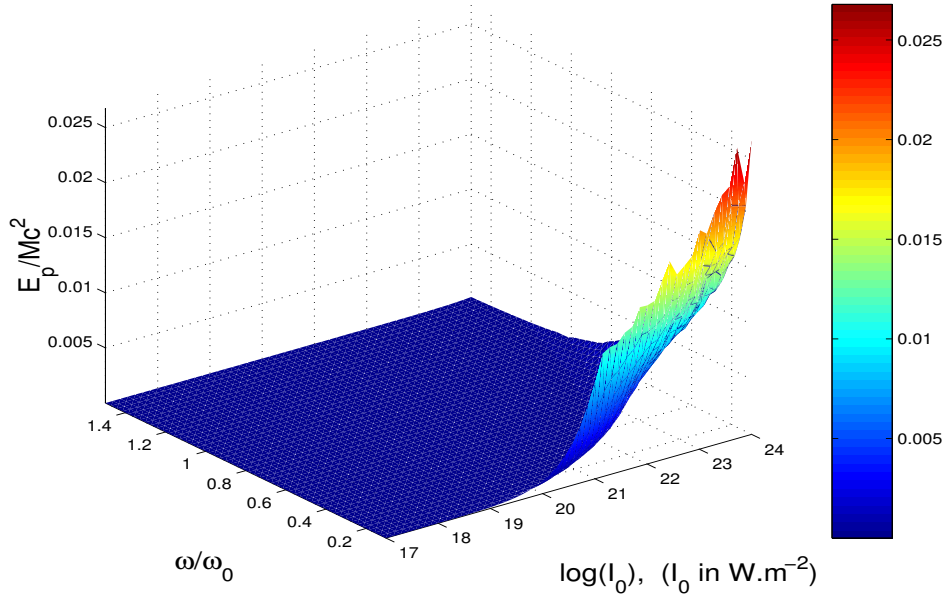


Abbildung 2.10:  $\mathcal{E}_p/Mc^2$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ . Anfangsradius des Clusters  $R = 50\text{\AA}$ , und  $n = 12$ . Der Radius der Elektronenkugel wächst linear von  $R$  zu  $70R$  während der Dauer des Laserpulses.

Feld auferlegt. Weil das ganze System in xy-Ebene translationsinvariant und isotrop ist, genügt es, eine Einheitsoberfläche in der xy-Ebene zu betrachten. Im folgenden sind alle extensive Variablen auf diese Einheitsfläche bezogen. Wir bezeichnen die Breite der Ionenschicht mit  $2d_1$  und der Elektronenschicht mit  $2d_2$ . Während die Ionenschicht unbeweglich bleibt, kann die Elektronenschicht sich sowohl bewegen als auch expandieren. Im Falle eines Planarclusters ist die rücktreibende Kraft pro Einheitsfläche

$$\mathbf{F}_p(z) = -\mathbf{e}_z \frac{e^2}{\epsilon_0} 2d_1^2 n_i^2 f_p(z_n, z_a). \quad (2.50)$$

Hier ist  $z_a = d_1/d_2$ ,  $z$  die Schwerpunktkoordinate der Elektronenschicht,  $z_n = z/d_2$ ,  $e$  Elektronladung und

$$f_p(z_n, z_a) = \text{sgn}(z_n) \begin{cases} |z_n| & \text{für } |z_n| \leq 1 - z_a; \\ \frac{1}{z_a} \left\{ (1 + z_a) \frac{|z_n|}{2} - [(1 - z_a)^2 + |z_n|^2] \right\} & \text{für } 1 - z_a \leq |z_n| \leq 1 + z_a; \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.51)$$

Das entsprechende Potentialfeld, definiert durch

$$\nabla \Phi_p(z) = -\mathbf{F}_p(z) \quad (2.52)$$

ist dann gegeben durch

$$\Phi_p(z) = \frac{e^2}{\epsilon_0} d_1^3 n_i^2 \varphi_p(z_n, z_a), \quad (2.53)$$

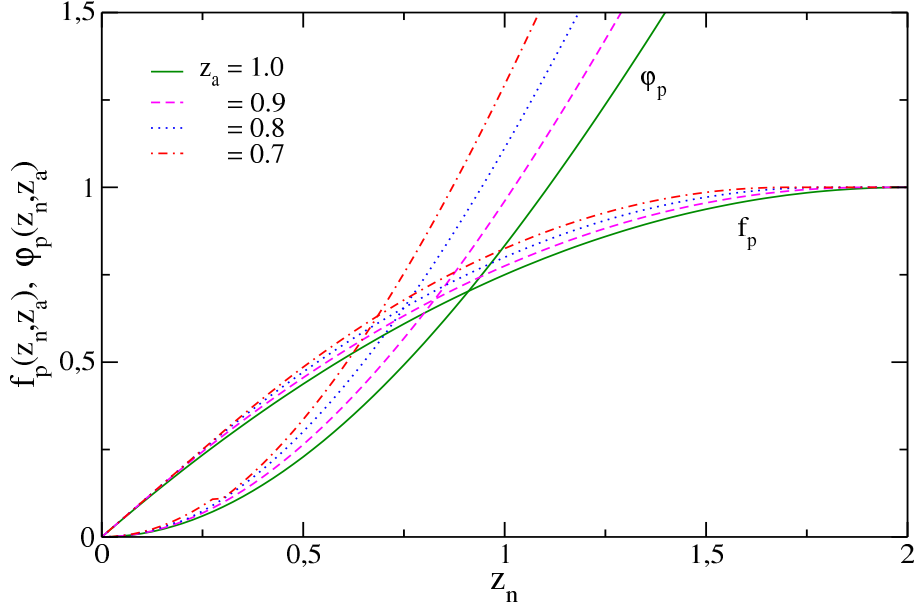


Abbildung 2.11: Ebener Cluster :  $f_p(z_n, z_a)$  und  $\varphi_p(z_n, z_a)$  als Funktionen von  $z_n$  für verschiedene Werte von  $z_a$ .

wobei

$$\varphi_p(z_n, z_a) = \frac{1}{z_a^2} \begin{cases} z_a z_n^2 & \text{für } |z_n| \leq 1 - z_a; \\ \frac{|z_n|^2}{2} \left[ -\frac{z_n^2}{3} + (1+z_a)|z_n| - (1-z_a)^2 \right] + \frac{(1-z_a)^3}{6} & \text{für } 1 - z_a \leq |z_n| \leq 1 + z_a; \\ z_a(2|z_n| - 1 - z_a^2/3) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.54)$$

Abbildung 2.11 zeigt den Verlauf von  $f_p(z_n, z_a)$  und  $\varphi_p(z_n, z_a)$  als Funktionen von  $z_n$  für verschiedene Werte von  $z_a$ . Im Gegensatz zu sphärischem Fall kann sich die Elektronenschicht von der Ionenschicht niemals vollständig trennen, da  $\Phi_p(z)$  mit wachsendem  $z$  linear gegen  $\infty$  geht.

Ähnlich zum sphärischen Fall lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \omega_p^2 d_1 f_p(z_n, z_a) \mathbf{e}_z. \quad (2.55)$$

Nach Einführung von dimensionlosen Variablen erhalten wir wie beim sphärischen Fall äquivalente Gleichungen in dimensionloser Form:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\mathbf{u}}{c} \right) = -\mathbf{e}_z \left[ \nu \tilde{g}(\tau, 0, \psi) - (2\pi \frac{\omega_0}{\omega})^2 \tilde{d}_1 f_p(z_n, z_a) \right], \quad (2.56)$$

und

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \frac{\mathbf{u}}{\gamma c}, \quad (2.57)$$

wobei jetzt  $\omega_0 = \omega_p$  ist. Die Anfangswerte sind nach wie vor  $\mathbf{u} = \tilde{z}(0) = 0$ . Die gesamte absorbierte Energie ist

$$\mathcal{E}_p = 2d_1 n_i m_e c^2 [(\gamma - 1) + \tilde{d}_1^2 \delta^2 \varphi_p(z_n, z_a)/2]. \quad (2.58)$$

Wie schon erwähnt, ist dieser Ausdruck nur dann richtig, wenn  $z_a$  konstant bleibt. Wenn jedoch  $z_a$  variiert, muß der äquivalente Ausdruck

$$\mathcal{E}_p = -2d_1 z_i n_i e E_0 \lambda \int_0^{n/2} d\tau \frac{d\tilde{z}}{d\tau} \tilde{g}(\tau, \tilde{z}, \psi). \quad (2.59)$$

verwendet werden.

Hier gibt es keinen einfallenden Laserpuls. Aber um die einheitliche Normierung zu bewahren, dividieren wir die absorbierte Energie durch

$$\mathcal{E}_L = I_0 \frac{nT}{8} h(z_a). \quad (2.60)$$

Es ist klar, dass  $\mathcal{E}_L$  der auf die Clusterfläche gefallenen Energie eines hypothetischen Laserpulses gleich ist, dessen elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  ist. Es folgt

$$f_a = \frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_L} = \frac{32\tilde{d}_1}{nh(z_a)} \left( \frac{n_i m_e c^3}{2I_0} \right) [(\gamma - 1) + \tilde{d}_1^2 \delta^2 \varphi_p(z_n, z_a)/2]. \quad (2.61)$$

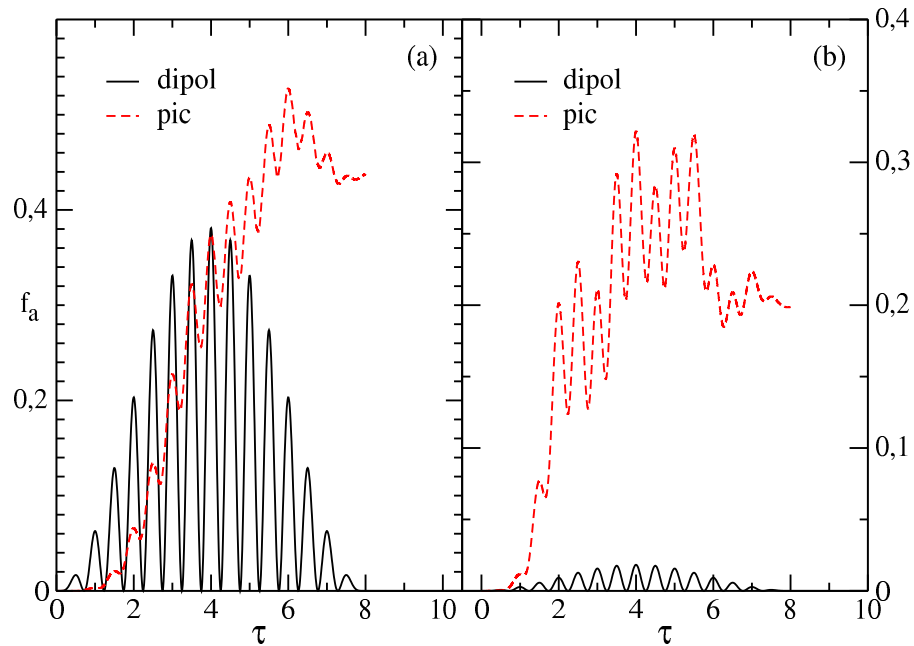


Abbildung 2.12: Ebener Cluster :  $z_a = 1$ ;  $f_a$  als Funktion von  $\tau$ . Abbildung (a) zeigt den Fall  $\omega/\omega_0 = 0.1$ ,  $d_1 = 10$  nm und Abbildung (b) den Fall  $\omega/\omega_0 = 0.3$ ,  $d_1 = 3.3$  nm. In beiden Fällen ist  $\omega_p = 1.77 \times 10^{16} \text{s}^{-1}$ ,  $n = 16$  und  $I_0 = 10^{22} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Abbildung 2.12 zeigt, dass nach PIC-Simulation deutlich mehr Energie vom Cluster absorbiert wird als das Globaldipolmodell vorhersagt. Die Ursache für diese Diskrepanz könnte daran liegen, dass das Globaldipolmodell

keine Stoßabsorption berücksichtigt, während die PIC-Simulation kollektive als auch Stoßeﬀekte (zu einem gewissen Grad) berücksichtigt. Wenn man annimmt, dass die PIC-Simulation richtig ist, dann folgt, dass zumindest im Falle eines ebenen Clusters, die nichtlineare kollektive Anregung weit weg von der Resonanz keine signifikante Rolle in der Energieabsorption spielt. Es muß hier aber betont werden, dass die ebenen und sphärischen Cluster sehr unterschiedlich die Energie aus dem Laserpuls absorbieren. Ein direkter Vergleich von  $f_a$  für beide Arten von Clustern ist wegen der Verschiedenartigkeit der Clustern ohne Bedeutung.

#### 2.2.4 Die Harmonischen von Laserfrequenzen

In [3] wurde angedeutet, dass die Erzeugung von Harmonischen möglicherweise mit Hilfe des Dipolmodells erklärt werden könnte. In diesem Abschnitt werden wir die Erzeugung von Harmonischen im Rahmen des Dipolmodells quantitativ untersuchen.

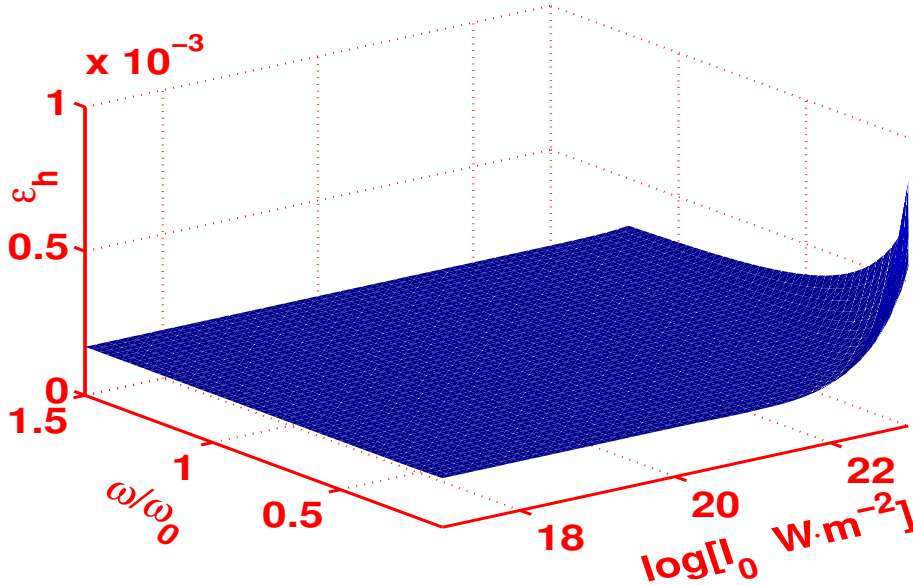


Abbildung 2.13: Umwandlungseffizienz von Laserstrahlung in die Harmonische. Die Spitzenlaserintensität beträgt  $5.0 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Die Pulsdauer beträgt sechs Laserperioden. Anfangsradius des Clusters  $R = 50 \text{ \AA}$ . Der Radius der Elektronenkugel wächst linear von  $R_1$  zu  $70R_1$  während der Dauer des Laserpulses.  $q = 10^4$  und  $\omega/\omega_0 = 0.3$ .

Der Ausdruck für die spontane Strahlungsleistung von einem beliebig beschleunigten geladenen Teilchen mit der Gesamtladung  $q$  kann durch relativistische Erweiterung vom klassischen Larmor Ausdruck erhalten werden [37]:

$$\begin{aligned}
P(t) &= 6 \times 10^9 \frac{q^2}{c} \gamma^6 [\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2] \quad \text{W} \\
&= 6 \times 10^9 \frac{q^2}{c} \gamma^4 (\gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\parallel}^2 + \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}^2) \quad \text{W}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

wobei  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ , und  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\parallel}$ , und  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}$  bezeichnen die Änderungsrate von  $\boldsymbol{\beta}$  und deren Komponente parallel bzw. senkrecht zu  $\boldsymbol{\beta}$ . Nach einigen algebraischen Umordnungen kann (2.62) wie folgt geschrieben werden:

$$P(t) = 6 \times 10^9 \frac{q^2}{cT^2} p_0(\tau) \quad \text{W} \tag{2.63}$$

wobei

$$p_0(\tau) = \gamma^2 \left\{ \left[ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{u}{c} \right) \right]^2 - \left[ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{u_{\parallel}}{c} \right) \right]^2 \left( \frac{u}{\gamma c} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{u}{\gamma c} \right)^2 \right] \right\} \tag{2.64}$$

ist.

Der Effizienzkoeffizient für die Umwandlung von Laserenergie in den Harmonischen  $\epsilon_h$  ist definiert als das Verhältnis der emittierten Strahlung zur gesamten eingefallenen Energie :

$$\epsilon_h = \frac{1}{I_0 \pi R^2 n T / 8} \int_0^{nT/2} P(t) dt \tag{2.65}$$

$$= 4.8 \times 10^{10} \frac{q^2}{\pi R^2 c T^2 I_0} \int_0^{n/2} p_0(\tau) d\tau. \tag{2.66}$$

Abbildung 2.13 zeigt  $\epsilon_h$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\ln(I_0)$  für einen Cluster mit  $10^4$  Elementarladungen,  $50 \text{ \AA}$  Radius, der für die Dauer von sechs Laserperioden bestrahlt wird. Für  $q = 10^3$ , es folgt  $\epsilon_h \approx 10^{-6}$ . Der experimentell gemessene mittlere Umwandlungskoeffizient liegt bei etwa  $10^{-7}$  [3].





## Kapitel 3

# Chaotisches Verhalten des Globaldipolmodells

Aus den Abbildungen 2.8 und 2.7 ist ersichtlich, dass die Laserabsorption im Rahmen des Globaldipolmodells nicht regulär ist. Die Konturdiagramme, die aus diesen Abbildungen stammen und in Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt sind, verdeutlichen diese Tatsache. Weiterhin zeigt die Abbildung 3.3 die maximalen Werte der Auslenkung ( $x/\lambda$ ) als Funktion des Logarithmus der Spitzenlaserintensität. Solche Abbildungen werden als Bifurkationsdiagramme bezeichnet. Die Abbildung 3.3 ähnelt dem Bifurkationsdiagramm wohl bekannter chaotischer Systeme [38, 39, 40].

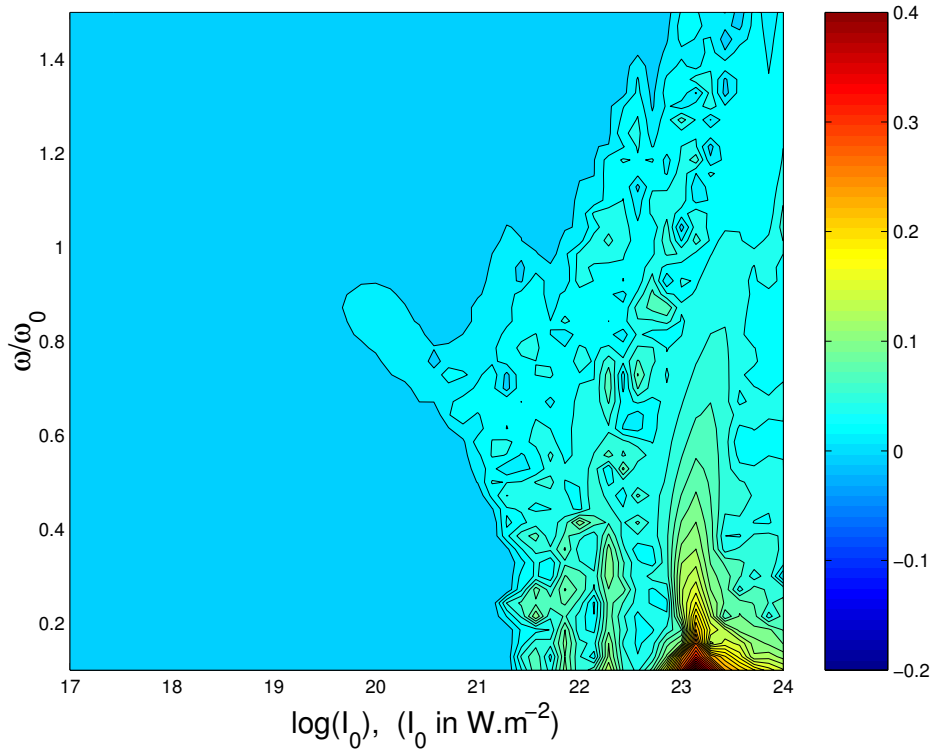
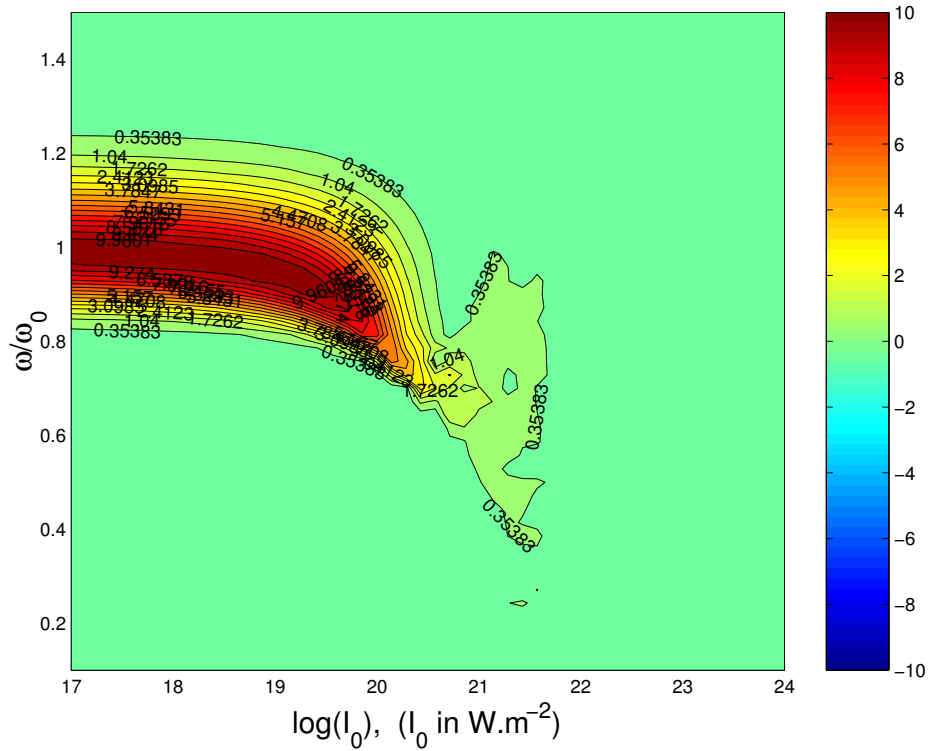


Abbildung 3.1: Konturdiagramm von  $\mathcal{E}_p/Mc^2$ .



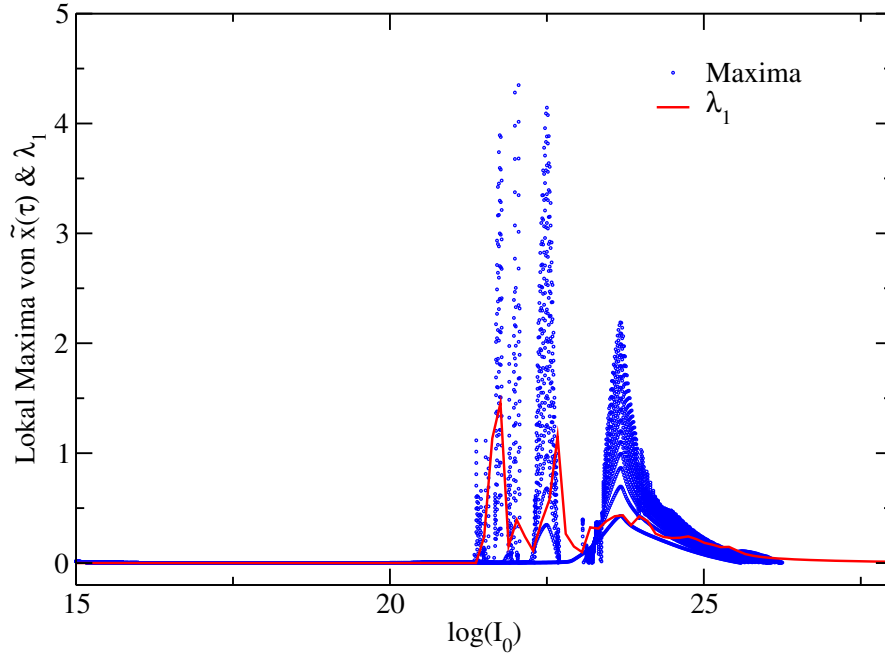


Abbildung 3.3: Schwingungsamplituden von  $\tilde{x}(\tau)$  als Funktion von  $\log(I_0)$  und dazugehöriges  $\lambda_1$ -Spektrum.

Das Fourierspektrum von chaotischen Bahn ist generell kontinuierlich. Wir können jedoch die Existenz von solchen Spektren nicht als Beweis für das Vorhandensein einer unendlichen Anzahl von Moden annehmen, denn der Begriff von Eigenmoden ist nur im Rahmen einer linearer Theorie gültig. Aus einer unendlichen Anzahl von Eigenmoden im Rahmen der linearen Theorie ergibt sich jedoch die Existenz einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden und deshalb eines unendlich dimensionalen Phasenraums. Ein kontinuierliches Fourierspektrum für ein endlich dimensionales (nicht lineares) System, dessen Bahn begrenzt ist, deutet auf chaotisches Verhalten hin [42]. Abbildung 3.4 zeigt ein solches Spektrum des Globaldipols für Spitzenlaserintensität  $I_0 = 1.17 \times 10^{21} \text{ W.m}^{-2}$   $n = 12$ , und  $\omega/\omega_0 = 0.5$ . Da der Phasenraum des Globaldipols höchstens fünfdimensional und die Bewegung beschränkt (keine Flucht) ist, scheint die Schlußfolgerung, dass der Dipol chaotisches Verhalten zeigt, unausweichlich.

Ein chaotisches System kann dynamisch und geometrisch beschrieben werden. Allgemein sind solche Beschreibungen sich ergänzend. Die dynamischen Beschreibungen sind in der Regel lokaler Natur. Dagegen sind die geometrischen Beschreibungen globaler Natur. Größen wie Lyapunovexponenten beschreiben die Dynamik des Systems und sind deshalb verbunden mit spezifischen Evolutionsbahnen. Größen wie die Kolmogorov-Sinai Entropie, Fraktaldimension und Korrelationsdimension sind nicht mit spezifischen Bahnen, sondern mit geometrischen Objekten wie dem Attraktor verbunden [38, 42, 43].

Die meisten Ergebnisse, insbesondere die der geometrischen Chaostheo-

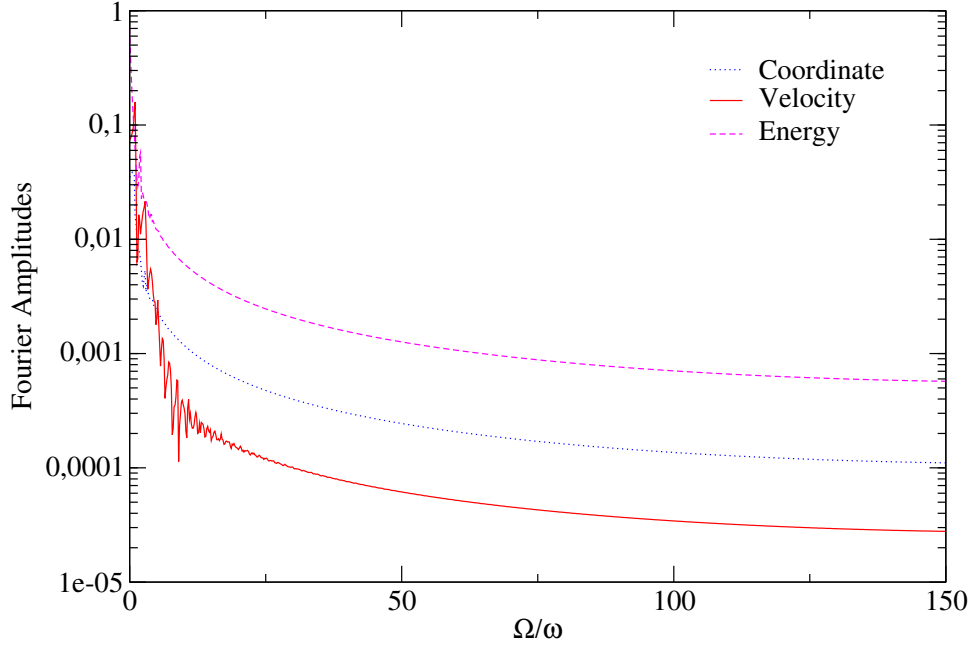


Abbildung 3.4: Fourierspektrum von  $\tilde{x}(\tau)$ ,  $d\tilde{x}(\tau)/d\tau$ , und  $f_a(\tau)$ .

rie, sind nur anwendbar auf dissipative Systeme<sup>2</sup>. Da unser System nicht dissipativ ist, werden wir die geometrischen Aspekte unseres Systems weiterhin ignorieren und konzentrieren uns nur auf die Lyapunovexponenten. Für chaotisches Verhalten ist mindestens ein positiver Lyapunovexponent notwendig und hinreichend [38, 39, 40]. Wir wenden uns also der Berechnung des Lyapunovspektrums des Globaldipolmodells zu.

## 3.2 Berechnung der Lyapunovexponenten

Lyapunovexponenten charakterisieren die Divergenzrate von Evolutionsbahnen im Phasenraum, die am Anfang in unmittelbarer Nähe zueinander lagen. Wenn die Divergenz ein exponentielles Wachstum hat, dann hat der Lyapunovexponent einen bestimmten positiven Wert.

Formell können die Lyapunovexponenten folgendermaßen definiert werden [41]: Die Dynamik des autonomen Systems sei durch das Gleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

beschrieben und dessen Lösung sei  $\phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Offensichtlich ist

$$\dot{\phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)), \quad \phi_{t_0}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.2)$$

Differenzierung von (3.2) nach  $\mathbf{x}_0$  führt auf die Variationsgleichung

---

<sup>2</sup>Ein dynamisches System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ist dissipativ, wenn  $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$  mindestens in einigen Regionen des Phasenraumes gilt.

$$D_{\mathbf{x}_0} \dot{\boldsymbol{\phi}}_t(\mathbf{x}_0, t_0) = D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0)) D_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0), \quad D_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\phi}_{t_0}(\mathbf{x}_0, t_0) = I \quad (3.3)$$

Wir führen eine neue Bezeichnung für  $D_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0)$  ein,  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0) = D_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Jetzt kann (3.3) wie folgt geschrieben werden:

$$\dot{\Phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0) = D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0, t_0)) \Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0), \quad \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_0, t_0) = I \quad (3.4)$$

Die Eigenwerte von  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$  bezeichnen wir mit  $m_i(t); i = 1, \dots, n$ . Dann sind die mit  $\mathbf{x}_0$  verbundenen Lyapunovexponenten definiert durch:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

wenn die Grenzwerte existieren<sup>3</sup>.

Es seien  $\mu_i; i = 1, \dots, n$  die Eigenwerte von  $D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv d\mathbf{f}(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$ . Es ist offensichtlich, dass,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[\mu_i(t)], \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

In Fällen, in denen  $D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  eine konstante Matrix ist, sind die Eigenwerte die Lyapunovexponenten. Es muß hier betont werden, daß die Matrix sich generell  $D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ändert während der Zustandspunkt seine Bahn zieht.

Es gibt verschiedene Methoden für die Berechnung von Lyapunovexponenten [41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50]. Die erste und offensichtliche Methode ist die direkte Berechnung der Matrix  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$  durch die Integration der Variationsgleichungen (3.4) und deren Eigenwerte und anschließende Berechnung von Exponenten nach der Definition (3.5). Diese Methode hat zwei Nachteile. Erstens ist im Falle eines chaotischen Systems mindestens ein Exponent positiv und deshalb ist die Matrix  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$  unbegrenzt, was zu numerischen Instabilitäten führen kann. Zweitens werden für eine chaotische Bahn die Spalten der Matrix schnell parallel zum Eigenvektor mit dem größten Eigenwert, was eine verlässliche Berechnung von Eigenwerten unmöglich macht.

Der offensichtliche Ausweg aus diesen Problemen besteht darin, die Zeit in geeignete Intervalle zu teilen und in jedem Zeitabschnitt die dazugehörige Matrix zu berechnen. Mit anderen Worten, wenn wir das Zeitintervall, in dem die Berechnung von  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$  keine Probleme bereitet, mit  $T$  bezeichnen, dann ist offensichtlich

$$\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0) \equiv \Phi_{kT}(\mathbf{x}_0, t_0) = \Phi_T(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) \cdots \Phi_T(\mathbf{x}_0, t_0). \quad (3.7)$$

Die Eigenwerte von  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$  können dann durch QR Zerlegung der einzelnen  $\Phi_T(\mathbf{x}_i, t_i)$  berechnet werden [47, 45, 51, 52].

Eine andere, aber äquivalente Methode besteht darin, dass man die Tendenz zu Parallelisierung mit dem Vektor mit größtmöglichem Eigenwert

---

<sup>3</sup>Wenn diese Grenzwerte nicht existieren hat der Begriff von Lyapunovexponent keine Bedeutung.

durch periodische Orthogonalisierung verhindert. Hier wird das exponentielle Wachstum von orthogonalen Vektoren zur Berechnung von Lyapunovexponenten zu Nutze gemacht. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass alle Eigenwerte des linearisierten Systems reell sind. Dann stimmen am Anfangspunkt die lokalen Lyapunovexponenten mit diesen Eigenwerten überein. Es seien  $\lambda_1(\mathbf{x}) \geq \lambda_2(\mathbf{x}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{x})$  diese Lyapunovexponenten und  $\{\eta_i(\mathbf{x}); i = 1, \dots, n\}$  die zugehörigen Eigenvektoren. Dann existieren Unterräume  $\{W_i(\mathbf{x}); i = 1, \dots, n\}$  mit folgenden Eigenschaften [41].

$$W_1(\mathbf{x}) \supset W_2(\mathbf{x}) \supset \dots \supset W_n(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

mit

$$\dim W_1(\mathbf{x}) = n, \quad \dim W_2(\mathbf{x}) = n - 1, \dots, \dim W_n(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.9)$$

Es ist einfach zu sehen, dass fast alle Störungen in  $W_i$  durchschnittlich wie  $e^{\lambda_i t}$  wachsen. Es sei  $\delta \mathbf{x}(t)$  eine allgemeine Störung. Die Lösung der linearen Variationsgleichung (3.4),  $\delta \mathbf{x}(t)$  kann wie folgt geschrieben werden:

$$\delta \mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{p}_1 e^{\lambda_1(\mathbf{x})t} + c_2 \mathbf{p}_2 e^{\lambda_2(\mathbf{x})t} + \dots + c_n \mathbf{p}_n e^{\lambda_n(\mathbf{x})t} \quad (3.10)$$

Die  $\mathbf{p}_i$  sind die entsprechende Eigenvektoren.

Offensichtlich ist, dass, wenn alle  $c_i; i = 1, \dots, n$ , außer  $c_n$  gleich Null sind, der Vektor wie  $e^{\lambda_n t}$  wächst. Aber wenn nur  $c_n$  und  $c_{n-1}$  von Null verschieden sind, wächst der Vektor wie  $e^{\lambda_{(n-1)} t}$ . Wenn nur  $c_i = 0; i = 1, \dots, k-1 < n$  und  $c_i \neq 0; i = k, \dots, n$ , wächst der Vektor wie  $e^{\lambda_k t}$ , wenn hinreichend Zeit vergangen ist. Diese Tatsache kann folgendermaßen zur Berechnung von Lyapunovexponenten verwendet werden [41, 44, 48, 49, 46].

### Berechnung von $\lambda_1$

Es sei  $\mathbf{u}_0$  ein Vektor mit Einheitslänge. Dadurch erhalten wir einen Vektor  $\delta \mathbf{x}^{(1)}$  durch simultane Integration von Evolutionsgleichungen und Variationsgleichungen;

$$\delta \mathbf{x}^{(1)} = \Phi_T(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{u}^{(0)} \quad (3.11)$$

Es sei  $\mathbf{u}^{(1)} = \delta \mathbf{x}^{(1)} / \|\delta \mathbf{x}^{(1)}\|$ . Wir betrachten  $\mathbf{u}^{(1)}$  als neuen Anfangsvektor und berechnen  $\delta \mathbf{x}^{(2)}$ ,

$$\delta \mathbf{x}^{(2)} = \Phi_T(\mathbf{x}^{(1)}) \mathbf{u}^{(1)} \quad (3.12)$$

Die Wiederholung der Prozedur  $K$ -mal führt zu

$$\delta \mathbf{x}(KT; \delta \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}^{(K)} \|\delta \mathbf{x}^{(K)}\| \dots \|\delta \mathbf{x}^{(1)}\|. \quad (3.13)$$

Für genügend große  $K$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\approx \frac{1}{KT} \ln \| \delta \mathbf{x}(KT; \delta \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \| \\
&= \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln \| \delta \mathbf{x}^{(k)} \|
\end{aligned} \tag{3.14}$$

### Berechnung von $\lambda_2$

Wir betrachten eine zufällig orientierte Scheibe am Ursprung des linearisierten Systems. Die Scheibe ist zweidimensional und  $W_2$  ist  $(n - 1)$ -dimensional. Die Schnittmenge ist also fast immer eindimensional und liegt in  $W_2$ . Folglich wächst die Fläche der Scheibe wie  $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ . Weil das System linear ist, gilt das Ergebnis auch für beliebige Flächen. Somit braucht man, um  $\lambda_1 + \lambda_2$  zu berechnen nur die Wachstumsrate von einer beliebigen Fläche zu berechnen. Wir folgen der Evolution der Fläche eines Rechtecks, das von zwei unendlich kleinen orthogonalen Vektoren  $\delta \mathbf{x}_1$  und  $\delta \mathbf{x}_2$  definiert ist. Wie schon erwähnt, tendiert im Laufe der Evolution der Vektor  $\delta \mathbf{x}_2$  sich in Richtung  $\delta \mathbf{x}_1$  zu orientieren, was die Berechnung der Fläche des Parallelogramms schwierig macht. Deshalb muß der Vektor  $\delta \mathbf{x}_2$  wiederholt zum  $\delta \mathbf{x}_1$  orthogonal rückorientiert werden. Sonst verläuft die Berechnung von  $\delta \mathbf{x}_2$  genauso wie die Berechnung von  $\delta \mathbf{x}_1$ , welche in letztem Abschnitt beschrieben wurde. Folglich:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 &\approx \frac{1}{KT} \ln \| \delta \mathbf{x}_1(KT; \delta \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_0) \| \| \delta \mathbf{x}_2(KT; \delta \mathbf{x}_{20}, \mathbf{x}_0) \| \\
&= \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln \| \delta \mathbf{x}_1^{(k)} \| + \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln \| \delta \mathbf{x}_2^{(k)} \|,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

und daraus folgt:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln \| \delta \mathbf{x}_2^{(k)} \| . \tag{3.16}$$

### Berechnung von allen $\lambda_i$

Zuerst werden  $n$  orthonormale Vektoren  $\mathbf{u}_i; i = 1, \dots, n$ , also eine orthonormale Basis in  $\mathbb{R}_n$ , gewählt. Simultane Evolution des dynamischen Systems (3.1) und jedes der Basisvektoren  $\mathbf{u}_i; i = 1, \dots, n$  nach den Variationsgleichungen (3.4) für das Zeitintervall  $T$  führt dann jeden Anfangsvektor  $\mathbf{u}_i$  in einen neuen Vektor  $\delta \mathbf{x}_i^{(1)}$ . Die Vektoren  $\delta \mathbf{x}_i^{(1)}; i = 1, \dots, n$  sind nicht mehr orthonormal wegen der Tendenz der Vektoren, sich in maximale Wachstumsrichtung zu orientieren.

Anwendung von modifiziertem Gram-Schmidt Orthogonalisationsverfahren [51, 52] auf die Menge  $\{\delta \mathbf{x}_i^{(1)}; i = 1, \dots, n\}$  erzeugt dann eine neue orthonormale Basis, die wiederum für ein weiteres Zeitintervall  $T$  weiterhin mit (3.1) und (3.4) evolviert. Dadurch erhalten wir eine neue Menge von

Vektoren  $\delta \mathbf{x}_i^{(2)}; i = 1, \dots, n$ . Wenn der Prozess  $K$ -mal wiederholt wird, erhalten wir einen Satz von Vektoren  $\{\delta \mathbf{x}_i^{(2)}; i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K\}$ . Nach den Argumenten, die im letzten Abschnitt angeführt wurden, folgt dann,

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta \mathbf{x}_i^{(k)}\| \quad (3.17)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \lambda_n \approx \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta \mathbf{x}_n^{(k)}\| \end{array} \quad (3.18)$$

Die Berechnung von Lyapunovexponenten ist einfacher, wenn die Eigenwerte der Matrix  $D_x \mathbf{f}(\mathbf{x})$  analytisch als Funktion von Evolutionkoordinaten  $\mathbf{x}(t)$  berechnet werden können. Dann sind die Mittelwerte dieser Eigenwerte über die Evolutionsbahn die gesuchte Lyapunovexponenten.

### 3.3 Lyapunovexponenten des Globaldipolmodells

Für die Berechnung von Lyapunovexponenten des Globaldipolmodells wurden die beiden letzteren Methoden verwendet.

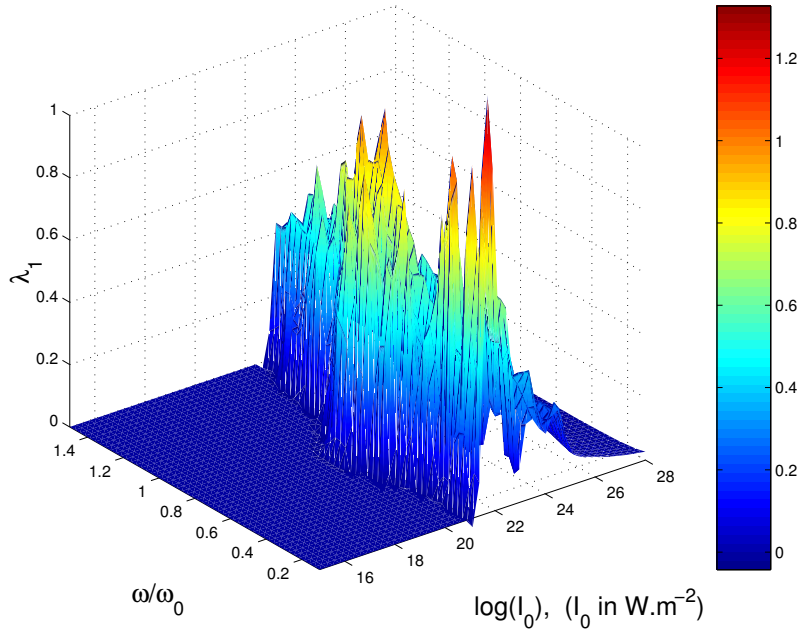


Abbildung 3.5:  $\lambda_1$ -Spektrum als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ .  $R = 50 \text{ \AA}$ , und  $n = 12$ .

Wenn das Magnetfeld des Laserpulses nicht berücksichtigt wird, besteht das Modell aus folgenden drei Gleichungen:



$$\frac{dy_0}{d\tau} = \frac{y_1}{(1+y_1^2)^{1/2}} \quad (3.19)$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\nu \sin\left(\frac{2\pi y_2}{n}\right) \sin(2\pi y_2) - \delta^2 r_a y_0 \frac{f(r_n, r_a)}{r_n} \quad (3.20)$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = 1, \quad (3.21)$$

wobei  $y_0 = \tilde{x}$ ,  $y_1 = u_x/c$ , und  $y_2 = \tau$ . Das zugehörige Variationsgleichungssystem lautet dann:

$$\frac{d\Delta y_0}{d\tau} = \frac{\Delta y_1}{(1+y_1^2)^{3/2}} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y_1}{d\tau} = & -\Delta y_2 2\pi\nu \left[ \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2\pi y_2}{n}\right) \sin(2\pi y_2) + \sin\left(\frac{2\pi y_2}{n}\right) \cos(2\pi y_2) \right] \\ & -\Delta y_0 \delta^2 r_a \left[ f(r_n, r_a)/r_n + r_n \frac{\partial(f(r_n, r_a)/r_n)}{\partial r_n} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{d\Delta y_2}{d\tau} = 0. \quad (3.24)$$

Die Matrix  $D_x \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ist offensichtlich:

$$D_x \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/(1+y_1^2)^{3/2} & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

wobei,

$$d_{21} = -\delta^2 r_a \left[ f(r_n, r_a)/r_n + r_n \frac{\partial(f(r_n, r_a)/r_n)}{\partial r_n} \right] \quad (3.26)$$

und

$$d_{23} = -2\pi\nu \left[ \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2\pi y_2}{n}\right) \sin(2\pi y_2) + \sin\left(\frac{2\pi y_2}{n}\right) \cos(2\pi y_2) \right]. \quad (3.27)$$

Aus (2.2) folgt,

$$d_{21} = -\delta^2 r_a h(r_n, r_a) \quad (3.28)$$

wobei

$$h(r_n, r_a) = r_a^2 \begin{cases} 1 & \text{für } r_n \leq 1 - r_a; \\ 3(-2a_1 r_n^{-2} + a_3 - 2a_4 r_n + 16a_5 r_n^3) & \text{für } 1 - r_a \leq r_n \leq 1 + r_a; \\ -2/r_n^3 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.29)$$

Die Eigenwerte von der Matrix (3.25) sind:

$$\mu_1 = -\mu_2 = (-d_{21}/(1+y_1^2)^{3/2})^{1/2} \quad (3.30)$$

$$\mu_2 = 0. \quad (3.31)$$

Die Lyapunovexponenten lauten dann:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \text{Re} < \mu_1 > = \begin{cases} < (-d_{21})^{1/2} / (1 + y_1^2)^{3/4} > & \text{wenn } d_{21} < 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\lambda_3 = 0 \quad (3.33)$$

wobei mit  $<>$  die Mittelung entlang der Evolutionbahn bezeichnet wird.

Einfachheitshalber betrachten wir im folgenden nur den Fall  $r_a = 1$ .

$$h(r_n, 1) = \begin{cases} 1 - (9 - r_n^2)r_n/8 & \text{für } r_n \leq 2; \\ -2/r_n^3 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.34)$$

Die von Null verschiedenen Lyapunovexponenten sind,

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \begin{cases} \delta < \sqrt{-h(r_n, 1)} / (1 + y_1^2)^{3/4} > & \text{wenn } h(r_n, 1) < 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Abbildung 3.3 zeigt ebenfalls das  $\lambda_1$ -Spektrum als Funktion von  $\log(I_0)$  für  $\omega/\omega_0 = 0.3$ . Das Auftreten des Chaos wenn  $\lambda_1$  positiv wird ist offensichtlich. Die Abbildung 3.5 zeigt das  $\lambda_1$ -Spektrum als Funktion von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$ . Es ist ersichtlich dass sich im bestimmten Bereich von  $\omega/\omega_0$  und  $\log(I_0)$  das Globaldipolmodell chaotisch verhält.

# Kapitel 4

## Erhöhte Stoßabsorption eines Laserstrahls in Clustern

Die Berechnung der Stoßabsorptionsrate setzt die Kenntnis der Elektronenstreuung durch den Clusterkern voraus. Wie in der Einführung erwähnt, fungiert der Clusterkern als eine übergroße Ladungskugel bezüglich der Elektronenstreuung. Im Kontrast zum Atomkern jedoch, können die Elektronen, die in einem heißen Plasma vorhanden sind, in den Clusterkern einfach eindringen. Deshalb können wir die Ergebnisse der Streuung niederenergetischer Elektronen durch Atomkerne, wobei die Atomkerne als unbewegliche Punktladungen betrachtet werden, nicht ohne weiteres auf die Streuung durch Clusterkerne übertragen. Wir müssen die Streuung von Elektronen durch den Clusterkern neu studieren.

Der Clusterkern besteht aus einer unbeweglichen Kugel mit Ladung  $q$ . Die Ladung ist homogen über das Kugelvolumen verteilt. Wir betrachten die Streuung eines Elektrons mit Ladung  $e$ , Masse  $m_e$ , Geschwindigkeit  $v_0$ , und Stoßparameter  $b$ , die durch diese Kugel gestreut wird. Die Abbildung 4.1 stellt den Streuprozess für eine bestimmte Parameterkonfiguration dar.

### 4.1 Coulombstreuung

Eine charakteristische Länge, die in Clusterstreuung maßgebend ist, ist der Clusterradius  $R$ . Deshalb messen wir alle Längen in Einheit von  $R$ .

Weil die Streuung außerhalb des Clusterkerns im Coulombfeld stattfindet, brauchen wir auch die Ergebnisse der Coulombstreuung. Deshalb betrachten wir zuerst die Coulombstreuung. Die auf das Elektron wirkende Kraft ist folgende:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -e_r \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \equiv -e_r \frac{\alpha}{r^2}. \quad (4.1)$$

In Gleichung (4.1) wurde die Konstante  $\alpha$  einfachheitshalber eingeführt. Das entsprechende Potential, das im Unendlichen verschwindet, ist dann gegeben wie folgt,

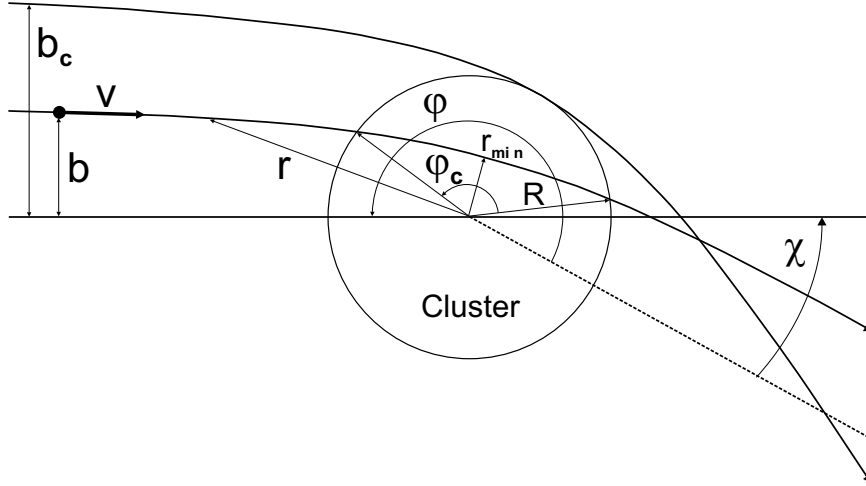


Abbildung 4.1: Streuung eines Elektrons mit Geschwindigkeit  $v$  durch Clusterkern mit Radius  $R = 1$ . Die Ladung des Kerns  $q$  ist über das ganze Kugelvolumen gleichmäßig verteilt.  $r$  ist der Ortsvektor,  $r_{min}$  ist die minimale Entfernung der Elektronenbahn vom Zentrum des Clusters,  $\varphi_C$  ist der Auslenkwinkel des Ortsvektors innerhalb des Clusters,  $\varphi$  ist der totale Auslenkwinkel des Ortsvektors, und  $\chi$  ist der totale Streuwinkel. Die Bahnen mit  $b < b_c = (1 + 2b_\perp)^{1/2}$  dringen in den Cluster ein. In der Abbildung werden die Bahnen für  $b = b_c = \sqrt{3}$  ( $b_\perp = 1$ ,  $\chi = 60^\circ$ ) und  $b = b_c/2$  gezeigt. Die Streuung innerhalb des Clusterkerns ist schwach.

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (4.2)$$

Es sei  $\mathbf{v}_0$  die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons. Die Bahn des Elektrons ist durch diese Geschwindigkeit und den Stoßparameter eindeutig festgelegt. Der Erhaltungssatz für die Energie des Elektrons ergibt

$$\frac{m_e v_0^2}{2} = \frac{m_e v_{\max}^2}{2} - \frac{\alpha}{r_{\min}}. \quad (4.3)$$

In Gleichung (4.3) sind zwei Größen,  $v_{\max}$  und  $r_{\min}$  unbekannt. Die zweite Gleichung, die diese Größen enthält, erhalten wir durch Anwendung von Drehimpulserhaltung. Wenn man die Drehimpulse des Elektrons im Unendlichen und bei  $r_{\min}$  gleichsetzt, erhält man

$$v_0 b = v_{\max} r_{\min}. \quad (4.4)$$

Einfachheitshalber führen wir hier eine neue Veränderliche ein:  $b_\perp = e\alpha/m_e v_0^2$ . Aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) ergibt sich die folgende Gleichung für  $r_{\min}$

$$\left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^2 + 2\frac{b_\perp}{b} \frac{r_{\min}}{b} - 1 = 0. \quad (4.5)$$

Die physikalisch korrekte Lösung von Gleichung (4.5) lautet,

$$r_{\min} = b_{\perp} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{b}{b_{\perp}} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (4.6)$$

Damit ist die Bedingung für das Eindringen des Elektrons in den Clusterkern ( $r_{\min} \leq 1$ ):

$$b_{\perp} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{b}{b_{\perp}} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \leq 1. \quad (4.7)$$

Aus der Ungleichung (4.7) folgt

$$b \leq b_c \equiv (1 + 2b_{\perp})^{1/2}. \quad (4.8)$$

Die Ungleichung (4.8) impliziert, dass für die gegebene Geschwindigkeit des Elektrons der Stoßparameter  $b$  kleiner als  $b_c$  sein muß damit das Elektron in den Clusterkern eindringt. Wenn  $b > b_c$  ist die Streuung coulombsch.

Der Auslenkwinkel  $\varphi$  für die Streuung in einem isotropischen Potential ist gegeben als [53, 54]

$$\varphi = 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2(1 - V(r)/\mathcal{E} - b^2/r^2)^{1/2}}, \quad (4.9)$$

wobei  $\mathcal{E} = m_e v_0^2/2$  die gesamte Energie des Teilchens ist. Es ist offensichtlich, dass

$$\frac{V(r)}{\mathcal{E}} = -\frac{2b_{\perp}}{r} \quad (4.10)$$

gilt. Durch Einsetzen von dieser Relation in (4.9) resultiert

$$\varphi = 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2(1 + 2b_{\perp}/r - b^2/r^2)^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Das Integral (4.11) kann durch die Transformation  $u = 1/r$  folgendermaßen integriert werden:

$$\begin{aligned} \varphi &= -2b \int_{1/r_{\min}}^0 \frac{dr}{r^2(1 + 2b_{\perp}u - b^2u^2)^{1/2}} \\ &= -2 \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2u)}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] \Big|_{1/r_{\min}}^0 \\ &= 2 \left\{ \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2/r_{\min})}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] - \arccos \left[ -\frac{b_{\perp}}{\sqrt{b_{\perp}^2 + b^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.5) ist es einfach zu beweisen, dass

$$\frac{(b_{\perp} - b^2/r_{\min})}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} = 1 \quad (4.13)$$

ist. Damit verschwindet das erste Glied in (4.12), und folglich ist<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Weil die cos-Funktion eine gerade Funktion ist, kann man das Minuszeichen fallen lassen.

$$\varphi = 2 \arccos \left[ -\frac{b_{\perp}}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.14)$$

Während  $b$  von 0 bis  $\infty$  wächst, nimmt  $\varphi$  monoton von  $2\pi$  nach  $\pi$  ab. Der Streuwinkel  $\chi_C \equiv \varphi - \pi$  nimmt dann monoton von  $\pi$  bis 0 ab. Es soll betont werden, dass für  $b = b_{\perp}$ ,  $\chi_C = \pi/2$  gilt; also ist die Bahn des Elektrons als Folge der Streuung um  $\pi/2$  abgelenkt. Deshalb verwenden wir die Bezeichnung  $b_{\perp}$  für diesen speziellen Wert von  $b$ .

## 4.2 Streuung durch Clusterkerne

Die Verteilung der Ladung auf das gesamte Clusterkernvolumen modifiziert das Kraftfeld, das auf das Elektron wirkt. Das neue Kraftfeld hat die Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -e_r \alpha \begin{cases} r & \text{für } r \leq 1; \\ 1/r^2 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Für das entsprechende Potential, das im Unendlichen verschwindet, erhalten wir

$$V(\mathbf{r}) = -e_r \alpha \begin{cases} (3 - r^2)/2 & \text{für } r \leq 1; \\ 1/r & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Die Bahn des Elektrons ist nach wie vor durch dessen Geschwindigkeit und den Stoßparameter eindeutig festgelegt. Der Energieerhaltungssatz des Elektrons ergibt ähnlich wie (4.3)

$$\frac{m_e v_0^2}{2} = \frac{m_e v_{\max}^2}{2} - \frac{\alpha}{2} (3 - r^2). \quad (4.17)$$

Die Gleichung (4.4) bleibt unverändert. Die Gleichungen (4.17) und (4.4) ergeben dann die folgende Beziehung für  $r_{\min}$ .

$$b_{\perp} b^2 \left( \frac{r_{\min}}{b} \right) - (1 + 3b_{\perp}) \left( \frac{r_{\min}}{b} \right)^2 + 1 = 0. \quad (4.18)$$

Die physikalisch korrekte Lösung von Gleichung (4.18) ist

$$r_{\min} = \left\{ (1 + 3b_{\perp}) - \left[ (1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp} b^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} / (2b_{\perp})^{1/2}. \quad (4.19)$$

Diese Lösung ist natürlich nur für  $b \leq b_c$  gültig. In diesem Fall gilt

$$(1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp} b^2 \geq (1 + b_{\perp})^2 \geq 0, \quad (4.20)$$

was einen reellen Wert für  $r_{\min}$  zu Folge hat.

Der Auslenkungswinkel  $\varphi$  kann jetzt als aus zwei Beiträgen  $\varphi_i$  und  $\varphi_o$  bestehend betrachtet werden. Der erste Beitrag  $\varphi_i$  entsteht aus der Streuung innerhalb des Clusterkerns in einem harmonischen Potential und

der zweite  $\varphi_o$  entsteht durch Streuung außerhalb des Clusterkerns in einem Coulombpotential.

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_i + \varphi_o \\ &= 2 \int_{r_{\min}}^1 \frac{bdr}{r^2 \left[ (1 + 3b_{\perp}) - b_{\perp}r^2 - \frac{b^2}{r^2} \right]^{1/2}} + 2 \int_1^{\infty} \frac{bdr}{r^2 \left( 1 + \frac{2b_{\perp}}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2}}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Das erste Integral in (4.21) kann in eine integrierbare Form gebracht werden durch die Transformation  $x = 1/r^2$ ,

$$\begin{aligned}\varphi_i &= -b \int_{1/r_{\min}^2}^1 \frac{dx}{\left[ -b_{\perp} + (1 + 3b_{\perp})x - b_{\perp}^2 x^2 \right]^{1/2}} \\ &= \arccos \left\{ -\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2/r_{\min}^2}{\left[ (1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2 \right]^{1/2}} \right\} \\ &\quad - \arccos \left\{ -\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2}{\left[ (1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2 \right]^{1/2}} \right\}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Aus der Gleichung (4.18) folgt, ähnlich zur Gleichung (4.13), dass

$$\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2/r_{\min}^2}{\left[ (1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2 \right]^{1/2}} = 1 \quad (4.23)$$

ist. Damit verschwindet wiederum das erste Glied in (4.22). Wir erhalten aus (4.22) analog zu (4.14),

$$\varphi_i = \arccos \left\{ -\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2}{\left[ (1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2 \right]^{1/2}} \right\}. \quad (4.24)$$

Der zweite Integral ist, abgesehen von den Integrationsgrenzen, identisch mit (4.11). Hier verläuft die Integrationsveränderliche  $u$  jedoch von 1 bis 0. Es ist also

$$\begin{aligned}\varphi_o &= -2b \int_1^0 \frac{du}{(1 + 2b_{\perp}u - b_{\perp}^2 u^2)^{1/2}} \\ &= -2 \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2 u)}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] \Big|_1^0 \\ &= 2 \left\{ \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2)}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] - \arccos \left[ -\frac{b_{\perp}}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Die Ausdrücke (4.22) und (4.25) zusammen ergeben folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos \left[ -\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2}{\left[ (1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2 \right]^{1/2}} \right] \\ &\quad + 2 \left\{ \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2)}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] - \arccos \left[ -\frac{b_{\perp}}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Die Streuwinkel ist damit durch<sup>2</sup>,

$$\chi = 2 \arccos \left[ -\frac{b_{\perp}}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] - \pi \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ 2 \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2)}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] - \arccos \left[ -\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2}{[(1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2]^{1/2}} \right] \right\} \\ & = \chi_C - \left\{ 2 \arccos \left[ -\frac{(b_{\perp} - b^2)}{(b_{\perp}^2 + b^2)^{1/2}} \right] - \arccos \left[ -\frac{1 + 3b_{\perp} - 2b^2}{[(1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}b^2]^{1/2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

gegeben.

Die Zusammensetzung von (4.28) ist offensichtlich. Das dritte Glied ist der Auslenkungswinkel innerhalb des Clusterkerns. Die Abbildung 4.2 zeigt den Verlauf von  $\chi$  und  $\chi_C$  als Funktion von  $b$  für  $b_{\perp} = 2.5$  ( $b_c = \sqrt{6}$ ) und  $b_{\perp} = 0.5$  ( $b_c = \sqrt{2}$ ). Ein sich in Richtung des Clusterzentrums bewegendes Elektron wird nicht ausgelenkt. Im Gegensatz dazu wird bei Coulombstreuung ein solches Elektron um  $\pi$  gestreut. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Streuung innerhalb der Clusterkern schwach ist.

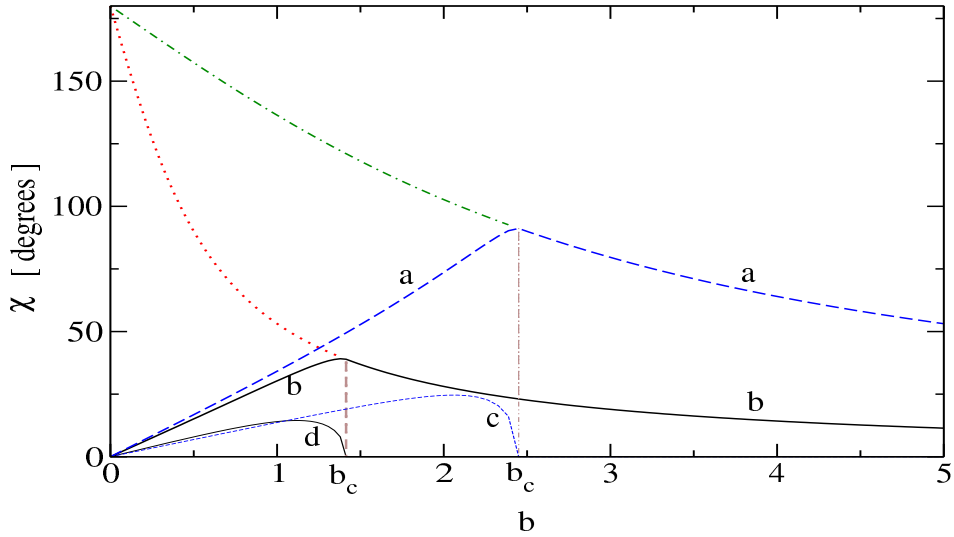


Abbildung 4.2: Streuwinkel  $\chi$  als Funktion von Stoßparameter  $b$  für einen homogen geladenen sphärischen Cluster. Linie a entspricht  $b_{\perp} = 2.5$  (niedrige Elektronenenergie), und Linie b entspricht  $b_{\perp} = 0.5$  ( $5\times$  höhere Elektronenenergie). Die entsprechenden Streuwinkel innerhalb des Clusters sind durch die Linien c und d dargestellt. Diese Linien enden an entsprechenden  $b = b_c$ -Punkten an der Achse  $b$ .

<sup>2</sup>Ein ähnlicher Ausdruck wurde in [55, 56], aber leider falsch angegeben



### 4.3 Stoßfrequenz

Die Elektron-Ionstoßfrequenz ist definiert durch durchschnittliche Impulsverlustrate [57],

$$\langle \dot{\mathbf{p}} \rangle_b \equiv -\nu_{ei} \mathbf{p}. \quad (4.29)$$

wobei der Index  $b$  die Mittelung über den Stoßparameter symbolisiert. Ähnlich wird hier Elektron-Clusterstoßfrequenz definiert.

$$\langle \dot{\mathbf{p}} \rangle_b \equiv -\nu_{ec} \mathbf{p}. \quad (4.30)$$

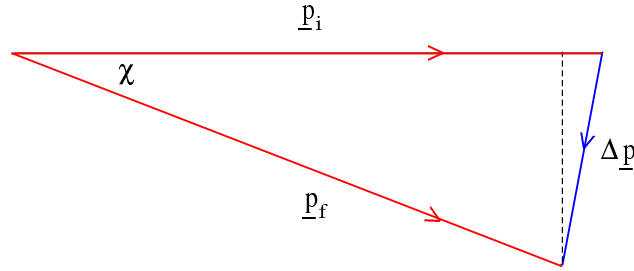


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung von einem Stoßprozess.  $\mathbf{p}_i$  ist der Anfangsimpuls des Elektrons. Nach der elastischen Streuung durch den Cluster verläßt das Elektron den Einflußbereich des Clusterkerns mit dem Endimpuls  $\mathbf{p}_f$ .  $\Delta \mathbf{p}$  ist der Impulsverlust des Elektrons.  $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$ .

Der Impulsverlust ist gegeben durch

$$\langle \dot{\mathbf{p}} \rangle_b = n_c v \int_0^{b_{\max}} d\sigma \Delta \mathbf{p} = n_c v \int_0^{b_{\max}} d\sigma \Delta p_{\parallel}, \quad (4.31)$$

wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Elektrons ist. Der letzte Schritt folgt, weil das Integral über alle  $\Delta \mathbf{p}_{\perp}$  verschwindet.

Aus Abbildung 4.3 ist ersichtlich, dass

$$\Delta p_{\parallel} = p(1 - \cos \chi). \quad (4.32)$$

Substitution von  $p(1 - \cos \chi)$  für  $\Delta p_{\parallel}$  in (4.31) resultiert in

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{p}} \rangle_b &= -\nu_{ec} \mathbf{p} = n_c v \int_0^{b_{\max}} d\sigma \Delta p_{\parallel} \\ &= n_c v \mathbf{p} \int_0^{b_{\max}} 2\pi b db (1 - \cos \chi). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aus der Gleichung (4.33) folgt dann,

$$\nu_{ec} = n_c v \int_0^{b_{\max}} 2\pi b db (1 - \cos \chi) \equiv n_c v \sigma. \quad (4.34)$$

Der Ausdruck (4.34) definiert den Impulsübertragungsquerschnitt  $\sigma$ ,

$$\sigma = \int_0^{b_{\max}} 2\pi b db (1 - \cos \chi). \quad (4.35)$$

Das Integral in (4.35) besteht aus zwei Komponenten. Die erste Komponente besteht aus dem Beitrag von  $\chi$ , der durch die Bahnen mit  $b \leq b_c$ , also die Bahnen, die in den Clusterkern eindringen, verursacht wird. Die zweite Komponente besteht aus dem Beitrag von  $\chi$ , die durch alle andere Bahnen verursacht werden. Der zweite Beitrag ist ein reiner Coulombbeitrag. Also

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\pi b_{\perp}^2 \frac{1}{2} \int_0^{\max(\beta_c, \beta_{\max})} (1 - \cos \chi) \beta d\beta \\ &= 4\pi b_{\perp}^2 \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\min(\beta_c, \beta_{\max})} (1 - \cos \chi) \beta d\beta + \theta(\beta_{\max} - \beta_c) \int_{\beta_c}^{\beta_{\max}} (1 - \cos \chi_C) \beta d\beta \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} &\equiv 4\pi b_{\perp}^2 \frac{1}{2} [\sigma_1 + \theta(b_{\max} - b_c) \sigma_2] \\ &\equiv 4\pi b_{\perp}^2 L_c, \end{aligned} \quad (4.37)$$

wobei  $\beta_c = b_c/b_{\perp}$ ,  $\beta_{\max} = b_{\max}/b_{\perp}$ , und  $\beta = b/b_{\perp}$  sind.

Die Größen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  werden durch den Ausdruck (4.36) definiert. Gleichzeitig definiert der Ausdruck (4.37) die Größe  $L_c$ . Wenn  $\beta_c = 0$ , reduziert sich  $L_c$  zum wohlbekannten Coulomblogarithmus. Deshalb kann  $L_c$  als ein generalisierter Coulomblogarithmus für die Elektronenstreuung durch Cluster betrachtet werden.

Wir betrachten nun den allgemeineren Fall und nehmen an, dass  $b_{\max} \geq b_c$  ist. Aus dem Ausdruck (4.14) folgt,

$$\sigma_2 = \ln \frac{1 + \beta_{\max}^2}{1 + \beta_c^2}. \quad (4.38)$$

Es ist möglich in (4.28) die arccos-Funktionen zu eliminieren und  $\cos(\chi)$  in expliziter Form als Funktion von  $b$  und  $b_{\perp}$  auszudrücken. Nach langen algebraischen Manipulationen erhält man

$$\cos \chi = - \frac{(b^2 - b_{\perp}^2)[2b^4 b_{\perp} - b^2(1 + 3b_{\perp} + 6b_{\perp}^2) + b_{\perp}^2(1 + 3b_{\perp})] - (2bb_{\perp})^2(1 + 2b_{\perp} - b^2)^{3/2}}{(b^2 + b_{\perp}^2)^2[(1 + 3b_{\perp})^2 - 4b_{\perp}^2]^{1/2}}. \quad (4.39)$$

Dieser Ausdruck für  $\cos \chi$  muß in das erste Integral von (4.36) eingesetzt und das Integral durchgeführt werden. Offensichtlich ist dieses Integral nicht einfach analytisch durchzuführen. Deshalb wurde es numerisch ausgewertet.

Ein Vergleich von  $\sigma_1$  mit entsprechender Größe für Coulombstreuung ist sehr instruktiv. Also vergleichen wir  $\sigma_1$  mit

$$\sigma_C = \int_0^{\beta_c} (1 - \cos \chi_C) \beta d\beta. \quad (4.40)$$

Abbildung 4.4 zeigt den Verlauf von  $\sigma_1/\sigma_C$  als Funktion von  $b_\perp$ . Es ist ersichtlich, dass  $\sigma_1$  nicht sehr stark von  $\sigma_C$  abweicht. Deshalb kann angenommen werden, dass  $L_c$  von dem Wert des Coulomblogarithmus nicht stark abweicht. Aus dieser Annahme folgt, dass  $L_c$ , von  $b_\perp$ , also von der Geschwindigkeit des Elektrons nur schwach abhängig ist. Im folgenden wird  $L_c$  als eine Konstante betrachtet.

Bisher haben wir eine Stoßfrequenz nur für monoenergetische Elektronen gefunden. Normalerweise unterliegen in einem Plasma die Elektronengeschwindigkeiten einer Verteilung  $f(\mathbf{v}_e)$ . Um die Stoßabsorption realistisch abzuschätzen, braucht man also eine Stoßfrequenz, die über diese Verteilung gemittelt ist. Wir wenden uns jetzt dieser Mittelung zu.

Mit Hilfe von (4.37), können wir  $\langle \mathbf{p} \rangle_b$  folgendermaßen ausdrücken [57]

$$\langle \mathbf{p} \rangle_b = -4\pi n_i v b_\perp^2 L_c \mathbf{p} = -K \mathbf{v} / v^3. \quad (4.41)$$

Wie erwähnt, betrachten wir  $K$  als eine Konstante. Wir wollen jetzt  $\langle \mathbf{p} \rangle_b$  mitteln über eine isotrope, aber sonst beliebige Elektronengeschwindigkeitsverteilung  $f(v_e)$ . Während der Einstrahlung des Laserpulses besteht die Elektronengeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  aus zwei Komponenten  $\mathbf{v}_{os}$  und  $\mathbf{v}_e$ ; d.h.  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{os} + \mathbf{v}_e$ . Es ist einfach zu sehen, dass [57],

$$\frac{\mathbf{v}_{os}}{v^3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{os}} \frac{1}{v} \quad (4.42)$$

ist. Es folgt

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{b,v} = -2\pi K \langle \frac{\mathbf{v}}{v^3} \rangle_v = -K \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{os}} \int_0^\infty dv_e v_e^2 f(v_e) \int_0^\pi \sin \chi d\chi / v. \quad (4.43)$$

Aus der Tatsache, dass  $v = |\mathbf{v}_{os} + \mathbf{v}_e|$  folgt, dass  $\sin \chi / v = \frac{1}{v_{os} v_e} \frac{\partial v}{\partial \chi}$ . Einsetzen von diesem Ausdruck in (4.43) und Integrieren über  $\chi$  ergibt dann

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{b,v} = 4\pi K \frac{\mathbf{v}_{os}}{v_{os}^3} \int_0^\infty dv_e v_e^2 f(v_e) \quad (4.44)$$

$$\equiv \overline{\nu_{ec}} m \mathbf{v}_{os}. \quad (4.45)$$

Die Beziehung (4.45) definiert die mittlere Stoßfrequenz bezüglich der Verteilungsfunktion  $f(v_e)$  wie folgt:

$$\overline{\nu_{ec}} = \frac{4\pi K}{m v_{os}^3} \int_0^\infty dv_e v_e^2 f(v_e) = Z_c^2 n_c L_c \frac{e^4}{v_{os}^3 \epsilon_0^2 m} \int_0^\infty dv v^2 f(v). \quad (4.46)$$

Hier  $Z_c$  ist die effektive Clusterladung und  $n_c$  ist die Anzahl der Cluster pro Volumeinheit. Es ist nicht schwer zu sehen, dass man die Integration in (4.46) nicht bis ins Unendliche auszudehnen braucht. Es genügt bis  $v_{os}$  zu integrieren, weil  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{os}} \frac{1}{v}$  dieselbe Struktur wie die Gravitation einer

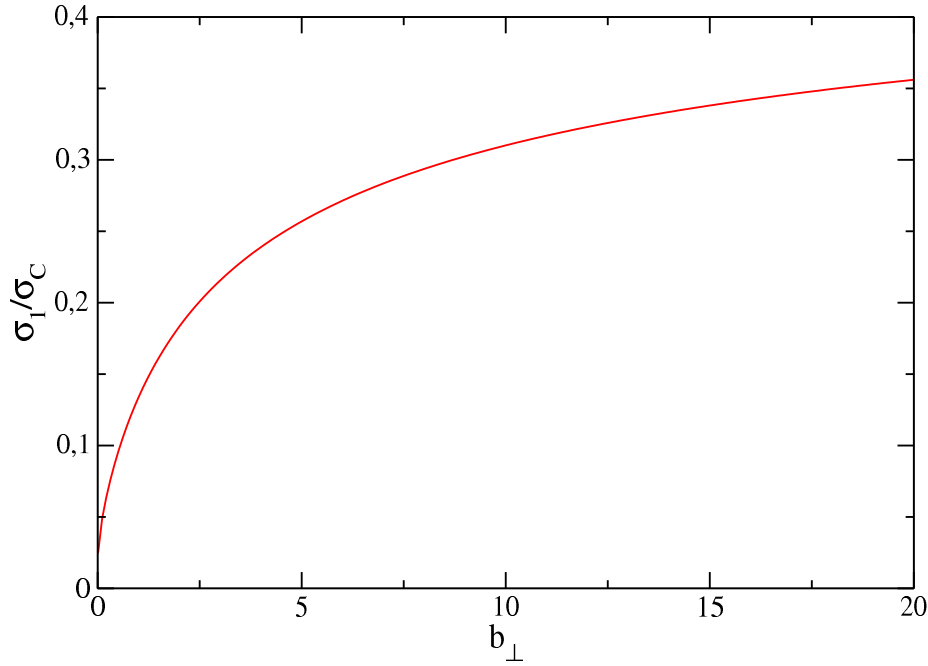


Abbildung 4.4:  $\sigma_1/\sigma_C$  als Funktion von  $b_\perp$ .

sphärischen Massenverteilung aufweist. Der Beitrag zu dieser Kraft von der Masse außerhalb  $v_{os}$  ist gleich Null.

Die Elektron-Ionstoßfrequenz während der Bestrahlung von Plasma durch einen Laserpuls hat dieselbe Form wie (4.46). Nur  $Z_c$ ,  $n_c$ , und  $L_c$  müssen mit entsprechenden Größen  $Z_i$ ,  $n_i$ , und  $L_i$  ersetzt werden.

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\nu_{ec} &= \left(\frac{Z_c}{Z_i}\right)^2 \frac{n_c}{n_i} \frac{L_c}{\ln \Lambda_i} \nu_{ei} \\ &= q_c^2 N_a \nu \frac{L_c}{\ln \Lambda_i} \nu_{ei}.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Hier  $q_c = Z_c/N_a e$  und  $N_a$  ist die Anzahl der Atome in Cluster. Weil  $N_a$  im Bereich von  $10 - 10^5$  und  $\frac{L_c}{\ln \Lambda_i}$  wie oben gezeigt nicht viel von 1 abweicht, ist die Vergrößerung von  $\nu_{ec}$  im Vergleich zu  $\nu_{ei}$ , und damit die Erhöhung der Stoßabsorption um den Faktor  $q_c^2 N_a$  offensichtlich. Da der Absorptionskoeffizient proportional zu Stoßfrequenz ist, der Absorptionskoeffizient ist auch um den Faktor  $q_c^2 N_a$  erhöht. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, für typische Clustergrößen und Temperatur,  $q_c^2$  ist größer als 0.01. Die Stoßabsorption ist also mindestens um den Faktor 100 erhöht.

## Kapitel 5

# Cluster im thermischen Gleichgewicht

Für das genaue Verständnis von Stoßabsorption ist es notwendig zu wissen was für eine effektive Ladung in den Clusterkernen vorliegt. Um diese Ladung zu berechnen, betrachten wir ein Clustermodell, das aus einem sphärischen starren Clusterkern mit Radius  $R$  und einer ebenfalls sphärischen, aber beweglichen Elektronenwolke besteht. Die Dichte von Elektronen, die eine bestimmte Temperatur haben, unterliegt dann einer Boltzmannschen Verteilung [58],

$$n_e(r) = n_0 e^{-e \int_0^r E(r) dr / T_e} \equiv n_0 e^{-e \Phi(r) / T_e}. \quad (5.1)$$

Hier ist  $n_e$  die Elektronendichte,  $r$  ist die Radialkoordinate,  $n_0$  ist eine Konstante, und  $T_e$  ist die Temperatur. Das elektrische Feld  $\mathbf{E}(r)$  ist wiederum von Elektronenverteilung bestimmt durch

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_e(r) - n_i(r)), \quad (5.2)$$

wobei

$$n_i(r) = \begin{cases} n_{i0} & \text{für } r \leq R \\ \alpha n_{i0} & \text{sonst, wobei } 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Differenzieren von Gleichung (5.1) bzgl.  $r$  resultiert in

$$E(r) = -\frac{T_e}{en_e} \frac{dn_e}{dr}. \quad (5.4)$$

Einsetzen von (5.4) für  $E(r)$  in (5.2) ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{T_e}{en_e} \frac{dn_e}{dr} \right) = -\frac{en_{i0}}{\epsilon_0} \left( \frac{n_e(r)}{n_{i0}} - \beta(r) \right). \quad (5.5)$$

Dabei ist

$$\beta(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq R \\ \alpha & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.6)$$

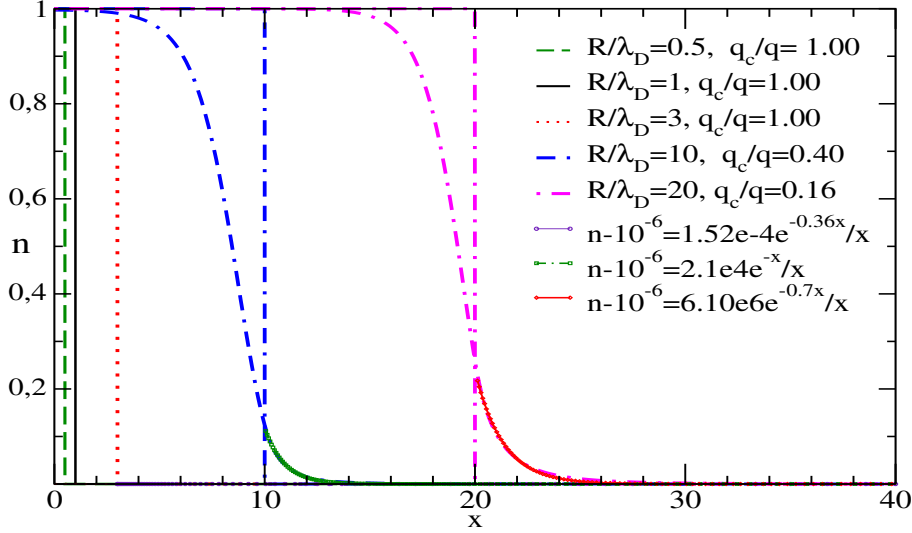


Abbildung 5.1: Gleichgewichtsverteilung von Elektronen in einem sphärischen Cluster ( $\alpha = 10^{-6}$ ). Die Cluster mit Radius kleiner als eine Debyelänge sind vollig ionisiert.

Wir transformieren die Gleichung (5.5) in dimensionslose Form, indem wir folgende dimensionlose Variablen einführen.

$$x = \frac{r}{\lambda_D} \quad \text{und} \quad n(r) = \frac{n_e(r)}{n_{i0}}; \quad \lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 n_e} \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

Jetzt kann die Gleichung (5.5) geschrieben werden als

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{n} \frac{dn}{dx} \right) = \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} (x \ln n) = n(x) - \beta(x) \quad (5.8)$$

mit

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq R/\lambda_D \\ \alpha & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.9)$$

Es ist zu beachten, dass alle Plasmaparameter nur durch einen einzigen Parameter, die Debyelänge  $\lambda_D$ , vertreten sind.

Um die Gleichgewichtsverteilung von Elektronen zu erhalten, muß diese Gleichung gelöst werden. Dabei sollten die Randbedingungen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = \alpha \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln n(x)]' = 0 \quad (5.10)$$

gelten. Zusätzlich muß die Konstant  $n_0$  bestimmt werden durch die Quasi-Neutralitäts-Bedingung,

$$\frac{3}{(1 - \alpha)(R/\lambda_D)^3} \int_0^\infty x^2 (n(x) - \alpha) dx = 1. \quad (5.11)$$

Sogar wenn die gesamten Elektronen von dem Cluster entfernt werden, strebt das Potential  $\Phi(r)$ , das bei  $r = 0$  verschwindet, zur Konstanten

$3q/8\pi\epsilon_0 R$ . Deshalb gibt es keine Lösung für das Gleichungssystem (5.8)-(5.10) für  $\alpha = 0^1$ . Aber für jeden endlichen Wert von  $\alpha$  existiert eine Lösung, die die Elektronenverteilung beschreibt.

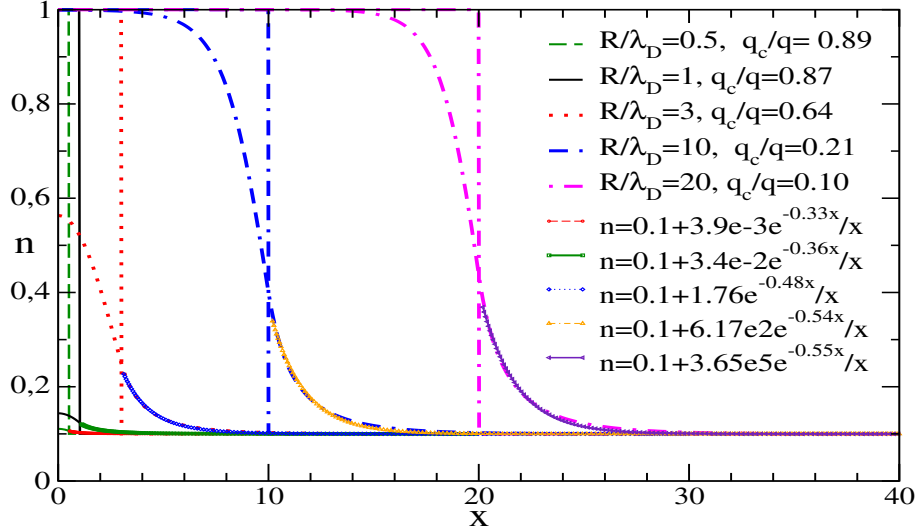


Abbildung 5.2: Gleichgewichtsverteilung von Elektronen in einem sphärischen Cluster ( $\alpha = 0.1$ ).

Wir finden die Lösung durch numerisches Schießen<sup>2</sup> [59, 60, 61, 62]. Die Randbedingungen, wie sie in (5.10) gegeben sind, können nicht in numerischen Lösungsverfahren verwendet werden, weil das Unendliche nicht maschinell erfaßt werden kann. Deshalb müssen wir eine Näherungslösung finden, die im Unendlichen die Randbedingungen (5.10) erfüllt und für endliche aber hinreichend große Werte von  $x$  noch gültig ist. Die Werte von  $n(x)$  und  $n'(x)$ , die man aus dieser Näherungslösung für hinreichend große Wert von  $x$  erhält, fungiert dann als Anfangswert für die numerische Lösung. Außerdem ist es instruktiv, das Verhalten der Lösung für sehr großen  $x$ -Wert analytisch zu studieren.

Um diese Näherungslösung zu finden, setzen wir  $n(x) \equiv \alpha + m(x) = \alpha(1+m(x)/\alpha)$ . Während  $x \rightarrow \infty$ ,  $m(x) \rightarrow 0$ , d.h.  $m(x)/\alpha$  ist eine unendlich kleine Größe. Deshalb kann in (5.8)  $\ln n$  durch  $\ln \alpha + m/\alpha$  ersetzt werden. Dann reduziert sich die Gleichung (5.8) zu

$$\frac{d^2}{dx^2}(xm) - \alpha(xm) = 0. \quad (5.12)$$

Die für große  $x$ -Werte nach Null strebende Lösung von (5.12) ist dann gegeben durch

$$m(x) = Ce^{-\sqrt{\alpha}x}/x. \quad (5.13)$$

<sup>1</sup>Diese Tatsache ist äquivalent zu dem Fakt, dass sich eine isothermische Planetenatmosphäre niemals in thermischen Gleichgewicht befinden kann und ins All diffundieren muß [58].

<sup>2</sup>Die Lösung kann auch durch Relaxationsmethoden gefunden werden.

Hier ist  $C$  eine Konstante, die durch die Quasi-Neutralitäts-Bedingung (5.11) bestimmt wird.

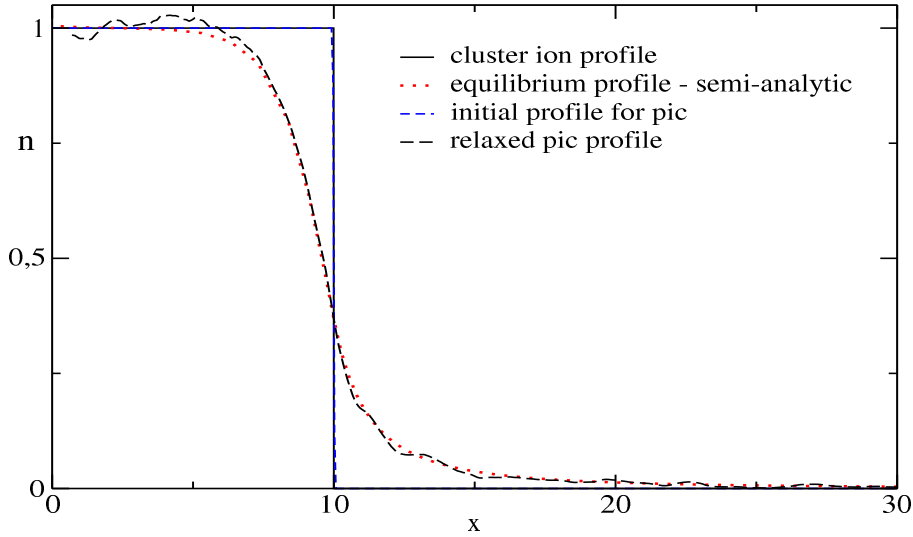


Abbildung 5.3: Vergleich der Gleichgewichts-Elektronen-Dichteverteilung eines ebenen Clusters aus der PIC-Simulation mit dem Ergebnis, das mit dem hier beschriebenen Formalismus berechnet wurde.

Die Randbedingungen können aber auch bei  $x = 0$  festgelegt werden. Aus der Tatsache, dass das elektrische Feld bei  $x = 0$  verschwindet und aus Gleichung (5.4) folgt, dass  $n'(0) = 0$ . Die andere Bedingung ist  $n(0) = n_0/n_{i0}$ .  $n(0)$  muß wiederum durch die Quasi-Neutralitäts-Bedingung (5.11) bestimmt werden. Wegen der Ausdrücke in der Gleichung (5.8), die den Faktor  $1/x$  enthalten, kann die numerische Lösung nicht bei  $x = 0$  gestartet werden. Deshalb muß man wiederum eine Näherungslösung finden, die für hinreichend kleine Werte von  $x$  gültig ist. Dabei studieren wir auch das Verhalten der Lösung in der Umgebung von  $x = 0$ . Wir führen wiederum eine neue Funktion  $p(x)$  durch die Relation

$$n(x) = n(0) + p(x) \quad (5.14)$$

ein. Also ist  $p(x)$  die Ausweichung von  $n(x)$  von dem konstanten Wert  $n(0)$  in der Nähe von  $x = 0$ . Einsetzen von (5.14) in (5.8), ähnlich zu  $x \rightarrow \infty$  resultiert in

$$\frac{d^2}{dx^2}(xp) = xn(0)(n(0) - 1 + p). \quad (5.15)$$

Jetzt müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nach dem ob  $n(0) = 1$  ist oder nicht. Im Falle  $n(0) = 1$  folgt aus Gleichung (5.15)

$$\frac{d^2}{dx^2}(xp) = n(0)xp. \quad (5.16)$$

Die Lösung hat die Form



$$xp = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1 = \text{Konst.}, \quad c_2 = \text{Konst.} \quad (5.17)$$

Es ist offensichtlich, dass diese Lösung nicht nach Null strebt für  $x \rightarrow 0$ . Es folgt also dass niemals  $n(0) = 1$  sein kann. Wenn  $n(0) \neq 1$  ist, kann die Gleichung approximiert werden durch

$$\frac{d^2}{dx^2}(xp) = xn(0)(n(0) - 1). \quad (5.18)$$

Die Lösung von (5.18) ist einfach und lautet

$$p(x) = n(0)(n(0) - 1)x^2/6. \quad (5.19)$$

Die Abbildungen (5.1) und (5.2) zeigen die Lösungen für verschiedene Clusterradien und  $\alpha = 10^{-6}$ , bzw.  $\alpha = 0.1$ . Um den Abfall des Elektronendichteprofiles zu quantifizieren haben wir diese Profile außerhalb des Clusterkerns mit analytischen Funktionen der Form

$$n(x) = \alpha + ae^{-\lambda/(x - \frac{R}{\lambda_D})}, \quad (5.20)$$

verglichen, wobei  $a$  und  $\lambda$  Anpassungsparameter sind. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Abbildungen (5.1) und (5.2) dargestellt. Es ist ersichtlich, dass für Cluster mit Radien größer als einige Debyelängen, die Abschirmung nicht wie erwartet innerhalb von  $\lambda_D$  sondern bei etwa  $0.8\lambda_D$  stattfindet.

Eine Gleichung ähnlich zu (5.8) kann auch für den Planarfall abgeleitet werden. Die Richtigkeit der Lösung von einer solcher Gleichung wurde auch durch PIC-Simulation bestätigt. Dabei wurde eine Dichteverteilung der Form,

$$n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.21)$$

als Anfangsverteilung für Elektronendichte angenommen. Die Ionendichteverteilung ist auch identisch mit dieser Verteilung. Während der Simulation blieben die Ionen kalt; den Elektronen wurde eine endliche Temperatur zugeordnet. Die Elektronenverteilung strebte dann zu ihrer Gleichgewichtsform. Die Abbildung 5.3 zeigt das Ergebnis der Simulation (nur für  $x \geq 0$ ). Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist offensichtlich.

Aus der Lösung der Gleichung (5.8) kann man die effektive Clusterladung bestimmen. Diese Ladung ist definiert als

$$Q \equiv \frac{4\pi}{3}R^3 n_{i0} e q_c = \frac{4\pi}{3}R^3 n_{i0} e - e \int_0^R 4\pi r^2 n_e(r) dr. \quad (5.22)$$

Der Ausdruck 5.22 definiert den Parameter  $q_c$ . Offensichtlich es gilt auch,

$$q_c = \frac{3}{(R/\lambda_D)^3} \int_{R/\lambda_D}^{\infty} x^2 (n(x) - \alpha) dx. \quad (5.23)$$

Abb. 5.4 zeigt  $q_c$  als Funktion von  $R/\lambda_D$  für  $\alpha = 10^{-6}, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ , und  $0.9$ .

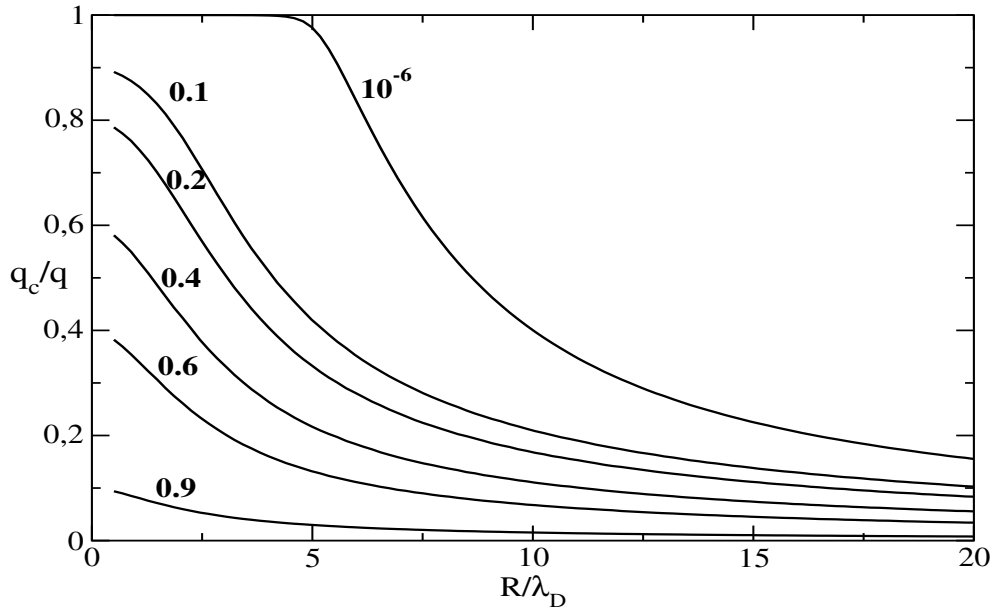


Abbildung 5.4: Ladungsbruchteil  $q_c$  von sphärischen Clustern als Funktion von Clusterradien für verschiedene  $\alpha = 0.001, 0.1$ , und  $0.2$ .

Wie aus diesen Abbildungen hervorgeht, befinden sich außerhalb vom Clusterkern eine bemerkenswerte Anzahl von Elektronen im thermodynamischen Gleichgewicht. Diese Tatsache führt dazu, dass die Streuelektro-  
nen, deren Stoßparameter größer sind als der Clusterradius, sich im abgeschirmten Potential von dieser effektiven Ladung bewegen.

Die überwiegende Anzahl von Elektron-Clusterstößen sind Stöße mit großen Stoßparametern. Folglich ist die Elektron-Clusterstoßfrequenz durch die effektiven Clusterkernladung bestimmt.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation versucht ein Verständnis der Prozesse, die während der Wechselwirkung ultrakurzer intensiver Laserpulse mit Edelgasclustern stattfinden, zu gewinnen und, soweit möglich, die experimentellen Beobachtungen zu erklären.

Die PIC-Simulationen, von denen in [33] berichtet und die auch von uns durchgeführt wurden (für ebene Cluster), zeigen, dass unter dem Einfluß des ultrakurzen Laserpulses die Elektronen, zu mindest im Anfangstadium, als ein kompaktes Objekt relativ zu den Ionen schwingen. Dieses Verhalten führt natürlich auf den Globaldipol [29].

Der erste Teil der Dissertation, bestehend aus Kapiteln 2 und 3, ist einer kompletten Untersuchung des Globaldipolmodells und dessen Schlußfolgerungen gewidmet. In Kapitel 2 werden die Gleichungen für die Evolution des Globaldipols abgeleitet und numerisch gelöst. Diese Lösungen ermöglichen es uns, die absorbierte Energie bzw. die Absorptionseffizienz im Rahmen des Globaldipolmodells zu berechnen. Es wurde gezeigt, dass sich für niedrige Laserintensitäten der Globaldipol wie ein harmonischer Oszillator verhält. Die Absorptionseffizienz für einen harmonischen Oszillator wurde auch analytisch, klassisch und quantenmechanisch, berechnet und stimmt natürlich mit numerisch erhaltenen Wert überein. Für höhere Intensitäten ( $I_0 > 10^{21} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ ) verhält sich der Dipol stark nichtlinear und der Begriff der Resonanz verliert jegliche Bedeutung. In der Tat, wie die Abbildung 2.8 zeigt, nimmt bei höheren Intensitäten die Absorption mit abnehmender Laserfrequenz generell zu. Die Expansion der Elektronenkugel reduziert jedoch infolge Aufheizung die Absorption. Trotzdem können, wie aus der Abbildung 2.10 ersichtlich, im Rahmen des Globaldipolmodells die Elektronen theoretisch bis zu 5 keV von einem Laserpuls mit  $10^{22} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  Spitzenintensität geheizt werden.

Die Absorptionseffizienz eines Planarclusters wurde auch im Rahmen des Globaldipolmodells und mit PIC-Simulation berechnet. Wie die Abbildung 2.12 zeigt, stimmen die Ergebnisse jedoch nicht miteinander überein. Die Ursache für die Diskrepanz könnte daran liegen, dass die PIC-Simulation bis zu einem gewissen Grad Stöße wegen endlicher Ausdehnung und Dichteschwankungen (Mikrofelder) miteinbezieht, was das Globaldipolmodell offensichtlich nicht tut.

Ein oszillierender Globaldipol emittiert elektromagnetische Strahlung. Wir haben das Spektrum der emittierten Strahlung berechnet. Die Umwandlungseffizienz der Laserenergie in Harmonische der Laserfrequenz stimmt annähernd mit dem experimentell beobachteten Wert überein [3].

Die Abbildungen 2.7 und 2.8 zeigen, dass die Absorption im Rahmen des Globaldipolmodells keine glatte Abhängigkeit von  $\omega/\omega_0$  und  $I_0$  aufweist. Ferner führen die Abbildungen 3.4 und 3.3 zu der Schlußfolgerung, dass sich der Globaldipol unter dem Einfluß des Laserpulses chaotisch verhält. Kapitel 3 beschreibt die chaotischen Aspekte des Globaldipols. In diesem Kapitel berechnete Lyapunovexponenten bestätigen, dass der Globaldipol chaotisch ist.

Im Gegensatz zu Teil I, wo stoßfreie Absorption der Gegenstand der Untersuchungen war, zielt Teil II, bestehend aus Kapiteln 4 und 5, auf einen ergänzenden Absorptionsmechanismus - nämlich die Stoßabsorption. Als Auftakt zur Berechnung der Elektron - Clusterstoßfrequenz wurde in Kapitel 4 die Gleichgewichtsdichteverteilung von Elektronen in einem Cluster berechnet. Die einzige maßgebende Längeneinheit ist hier die Debyelänge. Es wurde gezeigt, dass kleine Cluster (Clusterradius  $\sim \lambda_D$ ) fast völlig ionisiert sind, d.h., die meisten Elektronen befinden sich außerhalb des Clusters. Für größere Cluster reduziert sich die Elektronendichte außerhalb des Clusterkerns um den Faktor  $e$ , also auf 37% innerhalb von etwa  $0.8 \lambda_D$ .

Die effektive Ladung des Clusterkerns hängt nicht nur von dem Radius des Clusters ab sondern auch von der Dichte des Hintergrundplasmas, in dem der Cluster sich befindet. Die effektive Ladung des Clusters als Funktion des Clusterradius für verschiedene Hintergrundplasmadichten wurde auch in Kapitel 4 berechnet.

Bezüglich der Stöße fungiert der Clusterkern wie ein riesiger Atomkern. Im Gegensatz zum Atomkern besitzt der Clusterkern jedoch große Volumina, die für Elektronen durchlässig sind, und modifiziert daher die Elektronstreuung. Deshalb ist eine neue Berechnung der Stoßfrequenz unentbehrlich und wurde in Kapitel 5 durchgeführt. Diese Frequenz liegt um Größenordnungen höher als die übliche Elektron-Ionstoßfrequenz, was natürlich zur erhöhten Stoßabsorption führt.

Hauptergebnisse der vorliegenden Dissertation sind :

- Das Globaldipolmodell kann einige Aspekte der Ultrakurzpulslaser-Clusterwechselwirkung zufriedenstellend erklären.
- Wegen des stark nichtlinearen Verhaltens des Globaldipols hat der Begriff von Globalresonanz keine Bedeutung. Generell gilt in diesem Bereich: je niedriger die Laserfrequenz, desto größer die stoßfreie Absorption (vorausgesetzt, das Globaldipolmodell beschreibt die Absorption richtig).
- Das Verhalten des Globaldipols ist für einige Bereiche der Spitzenlaserintensität chaotisch.

- Im thermischen Gleichgewicht sind die Kleincluster fast völlig ionisiert und verhalten sich wie riesige Atomkerne. Größere Clusterkerne sind auch maßgeblich geladen.
- Sehr große Clusterkernladung führt zu erhöhter Stoßabsorption der Laserstrahlung.

Das Globaldipolmodell kann folgendermaßen weiterentwickelt werden :

- Die Elektronenwolke wurde immer als kugelförmig angenommen. Die Verzerrungen der Kugel, die zwangsweise auftreten, wurden nicht berücksichtigt. Eine Erweiterung des Modells könnte die Verzerrungen miteinbeziehen.
- Die Ionen wurden als unbeweglich angenommen, was nicht der Realität entspricht. Sicher können die Ionen am Anfang als unbeweglich betrachtet werden, aber zu späteren Zeiten muß die Ionendynamik doch berücksichtigt werden. Das Modell könnte so erweitert werden, dass die Evolution von Elektronen und Ionen selbstkonsistent behandelt wird.



# Anhang A

## Berechnung der Kraft zwischen zwei geladenen und sich durchdringenden Kugeln

Die Berechnung der Kraft für die Kugeln mit gleichem Radius wurde in [33] durchgeführt. Die Kraft wurde direkt berechnet, wofür eine relativ komplizierte Vektorintegration notwendig war. Die Kraft kann auch indirekt durch die Differenzierung der potentiellen Energie  $W$  berechnet werden. Die Berechnung der potentiellen Energie in Abhängigkeit von dem Abstand  $x$  zwischen den Zentren der Kugeln bezieht sich nur auf eine skalare Integration und ist daher relativ einfacher.

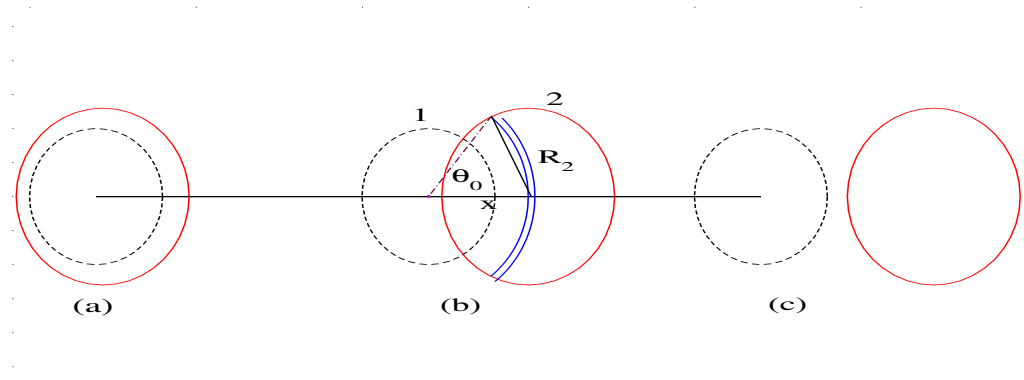


Abbildung A.1: Schematische Darstellung der Kugeln. Die Abbildungen (a), (b), und (c) zeigen die verschiedenen Fälle, in denen die analytischen Ausdrücke für die Kraft unterschiedlich sind.

Wie aus Abbildung A.1 ersichtlich, unterscheiden wir drei Fälle und nehmen an, dass die potentielle Energie der Kugeln verschwindet wenn sie unendlich von einander entfernt sind. Wir bezeichnen die Ladung und den Radius der  $i$ -ten ( $i=1, 2$ ) Kugel mit  $q_i$  bzw.  $R_i$ . Abgesehen von  $q_1$  und  $q_2$ , ist  $W$  nur von drei Längen,  $R_1$ ,  $R_2$ , und  $r$ , abhängig. Deshalb kann  $W$  rein formell aus Dimensionsanalyse folgendermaßen geschrieben werden [63],

$$W(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} w_s(r_n, r_a), \quad (\text{A.1})$$

wobei

$$r_n \equiv x/R_2, \quad r_a \equiv R_1/R_2, \quad (\text{A.2})$$

und  $w_s(r_n, r_a)$  ist eine dimensionslose Funktion, die es zu berechnen gilt.

Das Potentialfeld, das durch die erste Kugel erzeugt wird, ist bekanntlich gegeben durch

$$\varphi_1(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{2R_1}(3 - \frac{r^2}{R_1^2}) & \text{für } r \leq R_1; \\ 1/r & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Generell betrachten wir die zweite Kugel als bestehend aus dünnen sphärischen Schalensegmenten deren Zentrum das Zentrum der ersten Kugel ist. Eine solche Schale ist in Abbildung A.1(b) dargestellt. Die potentielle Energie solcher Schalen ist einfach

$$dW = \varphi_1(r) \rho_2 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) d\theta \quad (\text{A.4})$$

$$= \varphi_1(r) \rho_2 2\pi r^2 (1 - \cos(\theta_0)) dr, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $\rho_2 \equiv 3q_2/4\pi R_2^3$  die Ladungsdichte der zweiten Kugel ist.

## **A.1** $0 \leq x < R_2 - R_1$

Es folgt also aus der Abbildung A.1(a),

$$W(x) = 2\pi\rho_2 \left\{ 2 \int_0^{R_1} \varphi_1(r) + 2 \int_{R_1}^{R_2-x} \varphi_1(r) + \int_{R_2-x}^{R_2+x} (1 - \cos(\theta_0)) \varphi_1(r) \right\} r^2 dr. \quad (\text{A.6})$$

Einsetzen von (A.3) in (A.6) und Ausführen der Integrationen resultiert dann in

$$W(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \frac{1}{2} (3 - 3r_a^2/5 - r_n^2). \quad (\text{A.7})$$

## **A.2** $R_2 - R_1 \leq x < R_2 + R_1$

Aus Abbildung A.1(b) folgt

$$W(x) = 2\pi\rho_2 \left\{ \int_{x-R_2}^{R_1} (1 - \cos(\theta_0)) \varphi_1(r) + \int_{R_1}^{R_2+x} (1 - \cos(\theta_0)) \varphi_1(r) \right\} r^2 dr, \quad (\text{A.8})$$

wobei  $\cos(\theta_0) = (r^2 + x^2 - R_2^2)/2rx$ .

Die Integrationen können auch einfach mit *MATHEMATICA* [64] durchgeführt werden. Das Ergebnis ist,

$$W(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 3(a_1/r_n + a_2 r_n - a_3 r_n^2/2 + a_4 r_n^3/3 - a_5 r_n^5/5 + a_6) \quad (\text{A.9})$$



wobei,

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{48} \left( \frac{1}{r_a^3} + r_a^3 \right) - \frac{3}{16} \left( \frac{1}{r_a} + r_a \right) \right], \quad a_2 = \frac{3}{32} \left( \frac{1}{r_a^3} - \frac{2}{r_a} + r_a \right), \quad (\text{A.10})$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{r_a^3} + 1 \right), \quad a_4 = \frac{3}{32r_a} \left( \frac{1}{r_a^2} + 1 \right), \quad a_5 = \frac{1}{96r_a^3}, \quad (\text{A.11})$$

und

$$a_6 = (1 - 1/5r_a^3 + 1/r_a - r_a^2/5)/4. \quad (\text{A.12})$$

### **A.3**    $R_2 + R_1 \leq x$

In diesem Falle sind die Kugeln ganz getrennt und die Kraft ist einfach die Coulombkraft.

Die Kraft ist natürlich  $-\partial W/\partial x$  und kann aus (A.7) und (A.9) einfach berechnet werden. Das Ergebnis ist dann (2.2). Die potentielle Energie ist schon in (A.7) und (A.9) gegeben. Wir brauchen nur den Wert  $W(0)$  aus diesem Ausdruck zu subtrahieren um  $\Phi(x)$  zu erhalten.



# Literaturverzeichnis

- [1] T. Ditmire, R. A. Smith, R. J. Marjoribanks, G. Kulcsar, and M. H. R. Hutchinson. X-ray yields from Xe clusters heated by short pulse high intensity lasers. *Applied Physics Letters*, 71:166, 1997.
- [2] T. Ditmire, R. A. Smith, J. W. G. Tisch, and M. H. R. Hutchinson. High intensity laser absorption by gases of atomic clusters. *Physical Review Letters*, 78:3121, 1997.
- [3] J. W. G. Tisch, T. Ditmire, D. J. Fraser, N. Hay, M. B. Mason, E. Springate, J. P. Marangos, and M. H. R. Hutchinson. Investigation of high-harmonic generation from Xenon atom clusters. *Journal of Physics B*, 30:L709, 1997.
- [4] E. Springate, S. A. Aseyev, S. Zamith, and M. J. J. Vrakking. Electron kinetic energy measurements from laser irradiation of clusters. *Physical Review A*, 68:053201–1, 2003.
- [5] T. Ditmire, E. Springate, J. W. G. Tisch, Y. L. Shao, M. B. Mason, N. Hay, J. P. Marangos, and M. H. R. Hutchinson. Explosion dynamics of atomic clusters heated by high-intensity femtosecond laser pulses. *Physical Review A*, 57:369, 1998.
- [6] Emilio Segre. *Nuclei and Particles*. W. A. Benjamin, New York, 1964.
- [7] S. A. Slutz et al. Dynamic hohlraum driven inertial fusion capsules. *Physics of Plasmas*, 10:1875–1882, 2003.
- [8] E. W. Becker, K. Bier, and W. Henkes. Strahlen aus kondensierten Atomen und Molekulen im Hochvakuum. *Zeitschrift für Physik*, 146:333, 1956.
- [9] O. F. Hagena and W. Obert. Cluster formation in expanding supersonic jets : effect of pressure, temperature, nozzle size, and test gas. *Journal of Chemical Physics*, 56:1793, 1972.
- [10] R. A. Smith, T. Ditmire, and J. W. G. Tisch. Characterisation of a Cryogenically cooled high-pressure gas jet for laser/cluster interaction experiments. *Review of Scientific Instruments*, 69:3798, 1998.
- [11] J. Wörmer, V. Guzielski, J. Stapelfeld, and T. Möller. Fluorescence excitation spectroscopy of xenon clusters in the VUV. *Chemical Physics Letters*, 159:321–326, 1989.

- [12] J. Farges, M. F. d. Feraudy, B. Raoult, and G. Torchet. Noncrystalline structure of argon clusters. II. Multilayer icosahedral structure of  $\text{Ar}_N$  clusters  $50 < N < 750$ . *Journal of Chemical Physics*, 84:3491, 1986.
- [13] C. Kittel. *Introduction to solid state physics, 7th Ed.* John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [14] T. Ditmire, T. Donnelly, A. M. Rubenchik, R. W. Falcone, and M. D. Perry. . *Physical Review A*, 53:3379, 1996.
- [15] D. Strickland and G. Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics Communications*, 56:219, 1985.
- [16] J. R. Klauder, A. C. Price, S. Darlington, and W. J. Albersheim. The theory and design of chirp radars. *Bell System Technical Journal*, 39:745, 1960.
- [17] A. McPherson, B. D. Thompson, A. B. Borisov, K. Bayer, and C. K. Rhodes. Multiphoton-induced X-ray emission at 4-5 keV from Xe atoms with multiple core vacancies. *Nature*, 370:631, 1994.
- [18] T. Donnelly, T. Ditmire, K. Neuman, M. D. Perry, and R. W. Falcone. High order harmonic generation in atom clusters. *Physical Review Letters*, 76:2472, 1996.
- [19] T. Ditmire, T. Donnelly, R. W. Falcone, and M. D. Perry. Strong X-ray emission from high-temperature plasmas produced by intense irradiation of clusters. *Physical Review Letters*, 75:3122, 1995.
- [20] T. Ditmire, J. W. G. Tisch, E. Springate, M. B. Mason, N. Hay, R. A. Smith, J. Marangos, and M. H. R. Hutchinson. High-energy ions produced in explosions of superheated atomic clusters. *Nature*, 386:54, 1997.
- [21] T. Ditmire, J. W. G. Tisch, E. Springate, M. B. Mason, N. Hay, J. Marangos, and M. H. R. Hutchinson. High energy ion explosion of atomic clusters: Transition from molecular to plasma behaviour. *Physical Review Letters*, 78:2732, 1997.
- [22] S. Dobosz, M. Lazijs, M. Schmidt, P. Maynardier, M. Perdrix, and D. Normand. Absolute keV photon yields from ultrashort laser-field-induced hot nanoplasmas. *Physical Review A*, 56:R2526, 1997.
- [23] M. Lazijs, S. Dobosz, D. Normand, and M. Schmidt. Explosion dynamics of rare gas clusters in strong laser fields. *Physical Review Letters*, 80:261, 1998.
- [24] T. Mocek, C. M. Kim, H. J. Shin, D. G. Lee, Y. H. Cha, K. H. Hong, and C. N. Nam. Investigation of soft X-ray emission from Ar clusters heated by ultrashort laser pulses. *Laser and Particle Beams*, 20:51, 2002.

- [25] G. Grillon, Ph. Balcon, J. P. Chambaret, D. Hulin, J. Martino, S. Moustakis, L. Notebaert, M. Pittman, Th. Pussieux, A. Rousse, J. Ph. Rousseau, S. Sebban, O. Sublemontier, and M. Schmidt. Deuterium-deuterium fusion dynamics in low-density molecular-cluster jets irradiated by intense ultrafast laser pulses. *Physical Review Letters*, 89:065005–1, 2002.
- [26] T. Ditmire, J. Zweiback, V. P. Yanovsky, T. E. Cowan, G. Hays, and K. B. Wharton. Nuclear fusion from explosions of femtosecond laser-heated deuterium clusters. *Nature*, 398:489, 1999.
- [27] T. R. Dittrich, B. A. Hammel, C. J. Keane, R. McEachern, R. E. Turner, S. W. Haan, and L. J. Suter. Diagnosis of Pusher-Fuel Mix in Indirectly Driven Nova Implosions. *Physical Review Letters*, 73:2324, 1994.
- [28] G. Pretzler, A. Saemann, A. Pukhov, D. Rudolph, T. Schätz, U. Schramm, P. Thirolf, D. Habs, K. Eidmann, G. D. Tsakiris, J. Meyer ter Vehn, , and K. J. Witte. Neutron production by 200 mJ ultrashort laser pulses. *Physical Review E*, 58:1165–1168, 1998.
- [29] C. Bréchignac and J. P. Connerade. Giant resonances in free atoms and in clusters. *Journal of Physics B*, 27:3795, 1994.
- [30] J. Posthumus. *Molecules and Clusters in Intense Laser Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [31] T. Ditmire. Simulation of exploding clusters ionized by high-intensity femtosecond laser pulses. *Physical Review A*, 57:R4094, 1998.
- [32] R. Lichters, R. E. W. Pfund, and J. Meyer ter Vehn. LPIC++-A Parallel One-dimensional Relativistic Particle-in-Cell Code for Simulating Laser-Plasma-Interactions. Technical report, Max Planck Institut für Quantenoptik, Garching, August 1997.
- [33] F. Greschik. *Kollektive Energieabsorption von Mikroplasmen in Star-ken Laserfeldern*. PhD thesis, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, May 2002.
- [34] A. S. Davydov. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [35] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Lalöe. *Quanten-mechanik I&II*. Walter de Gruyter, Berlin, 1999.
- [36] Albert Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover Publications, New York, 2000.
- [37] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik, 3. bearb. Aufl.* de Gruyter, Berlin, 2002.
- [38] R. C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, New York, 1994.

- [39] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [40] M. Lakshmanan and K. Murali. *Chaos in Nonlinear Oscillators*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [41] T. S. Parker and L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer Verlag, New York, 1989.
- [42] J. P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57:617–656, 1985.
- [43] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, and Jean-Marie Strelcyn. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Physical Review A*, 14:2338–2345, 1976.
- [44] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Neutron production by 200 mJ ultrashort laser pulses. *Physica D*, 16:285–317, 1985.
- [45] Karlheinz Geist, Ulrich Parlitz, and Werner Lauterborn. Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents. *Progress of Theoretical Physics*, 83:875–893, 1990.
- [46] Ippei Shimada and Tomomasa Nagashima. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of Theoretical Physics*, 61:1605–1616, 1979.
- [47] Luca Dieci, Robert D. Russel, and Erik S. van Vleck. On the computation of Lyapunov exponents for continuous dynamical systems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34:402–423, 1997.
- [48] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, and Antonio Giorgilli Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 15:9–20, 1980.
- [49] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, and Antonio Giorgilli Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Numerical Application. *Meccanica*, 15:21–30, 1980.
- [50] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45:712–716, 1980.
- [51] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Dover Publications, New York, 2003.
- [52] Gene H. Golub and Charles F. van Loan. *Matrix Computations*, 3rd Ed. John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1996.

- [53] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik (Band I) : Mechanik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, Deutschland, 1997.
- [54] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko. *Classical Mechanics, 3rd Ed.* Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2001.
- [55] M. B. Smirnov and V. P. Krainov. Hot electron generation in laser cluster plasma. *Laser Physics*, 13:1–5, 2003.
- [56] M. B. Smirnov and V. P. Krainov. Hot electron generation in laser cluster plasma. *Physics of Plasmas*, 10:438–442, 2003.
- [57] P. Mulser, F. Cornolti, E. Bésuelle, and R. Schneider. Time-dependent electron-ion collision frequency at arbitrary laser intensity-temperature ratio. *Physical Review E*, 63:016406–1, 2000.
- [58] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik (Band V) : Statistische Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1997.
- [59] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C++*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [60] Josef Stoer and Roland Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis, 3rd Ed.* Springer Verlag, New York, 2002.
- [61] F. S. Acton. *Numerical Methods That Work*. Mathematical Association of America, Washington, 1990.
- [62] H. B. Keller. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Dover, New York, 1991.
- [63] L. I. Sedov. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Mir Publishers, Moscow, 1982.
- [64] Stephen Wolfram. *The MATHEMATICA book, 5th Ed.* Wolfram Media, Champaign, Illinois, 2003.





## Lebenslauf

**von** Kanapathipillai Murukesapillai  
geboren am 03. 09. 1954.

**Schule** Nelliady Madya Maha Vidyalayam.  
1960-1972

**Studium** Physikstudium an der Universität zu Köln;  
1976-1981 Abschluß: Diplomphysiker.

### **Berufstätigkeit**

1981 - 1986 Research & Teaching Assistant am MIT.  
1987 - 1995 Assistant Lecturer, University of Jaffna, Sri Lanka.  
1996 - 2000 Assistant Lecturer, University of Peradeniya, Sri Lanka.  
2001 - Promotion in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. D. H. H. Hoffmann  
unter der Anleitung von Prof. Dr. P. Mulser.

# Danksagung

Mein Dank gilt :

Herrn Prof.Dr.D. H. H. Hoffmann für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe, die Ermöglichung der vorgelegten Dissertation durch die von ihm gewährte großzügige finanzielle Unterstützung und das stete Interesse am Fortgang der wissenschaftlichen Untersuchungen;

Herrn Prof.Dr.P. Mulser für die Betreuung und Diskussion während der Entwicklung der Dissertation;

Herrn Dr.Th. Schlegel für wissenschaftliche Beratung und Hilfestellung in schwierigen Detailfragen;

meiner Frau Eva Ruppel für die moralische Unterstützung.